№ 4752 МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ МИСИС

ИНСТИТУТ БАЗОВОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Физики

Л.В. Мудрецова

О.В. Рычкова

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ЗАДАЧИ С УКАЗАНИЯМИ К РЕШЕНИЮ

Сборник задач

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета

МИСИС УНИВЕРСИТЕТ

Москва 2023

УДК 51
М89

Рецензент
канд. техн. наук, доц. *И.А. Дьяков*
(Тамбовский государственный технический университет)

Мудрецова, Людмила Вячеславовна.

М89 Механика и молекулярная физика. Задачи с указаниями к решению : сб. задач / Л.В. Мудрецова, О.В. Рычкова. – Москва : Издательский Дом НИТУ МИСИС, 2023. – 82 с.
ISBN 978-5-907560-62-8

В пособии приведены задания для студентов, изучающих механику и молекулярную физику в курсе общей физики. Задания представлены по темам, соответствующим рабочей программе курса. Предложены указания к решению ряда задач.

Пособие предназначено для использования на практических занятиях по физике, а также для самостоятельной работы студентов.

УДК 51

ISBN 978-5-907560-62-8

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Изучение общей физики традиционно начинается с изучения механики. Следующим разделом, как правило, является молекулярная физика (термодинамика). При изучении данных разделов общей физики желательно учитывать специальность студентов. Это позволяет выделить те разделы, которые следует изучить углубленно, так как они тесно связаны с дисциплинами, которые студенты будут изучать в следующих семестрах. Таким образом, тематика физических задач, разбор методики их решения, их последовательность максимально ориентированы на потребности студентов Университета науки и технологий МИСИС.

Данное пособие ориентировано на изучение методов решения физических задач. Последовательность решения задач и их тематика коррелируют с рабочей программой дисциплины и специальностью студентов. Изучение задач, включенных в данный сборник, позволяет освоить следующие компетенции: ОПК-1 (способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности, осуществлять моделирование и анализ для проведения детальных исследований и поиска решения технических вопросов в соответствующей области исследования); ОПК-1-З1 (базовые знания в области физико-математических наук и (или) естественных наук, необходимые для решения профессиональных задач); ОПК-1-У1 (уметь использовать знания фундаментальных основ, подходы и методы математики и физики в профессиональной деятельности, в интегрировании имеющихся знаний).

Освоение материала, представленного в данном пособии, необходимо студентам для изучения таких дисциплин / курсов, как «Механика»; «Детали машин»; «Сопротивление материалов»; «Обработка металлов давлением», «Прокатка металлов» и пр.

Семинар 1
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

1. Радиус-вектор точки изменяется со временем по закону $r = 2t^2i + tj + k$. Найдите скорость и ускорение точки, модуль скорости в момент $t = 2$ с и приближенное значение пути, пройденного за 10-ю секунду движения.

2. Тело падает с высоты 200 м без начальной скорости. Определите, какой путь пройдет тело за пятую секунду падения; за какое время оно пройдет третий метр своего пути.

3. Тело брошено горизонтально со скоростью 10 м/с. Найдите тангенциальное и нормальное ускорение тела, а также радиус кривизны траектории через 1 с после начала движения.

4. Мяч брошен со скоростью 30 м/с под углом 45° к горизонту. Определите, через какое время скорость мяча будет направлена под углом 30° к горизонту; какими будут нормальное и тангенциальное ускорения в этот момент и радиус кривизны траектории.

5. Мяч, брошенный со скоростью 10 м/с под углом 45° к горизонту, ударился о стенку, находящуюся на расстоянии 3 м от места бросания. Найдите координаты точек удара о стенку и приземления, а также скорость мяча в момент удара.

6. Скорость точки в начальный момент времени $v_0 = 2i + 4j + 8k$, а в конечный $v = 7i - 2j - k$. Найдите: а) приращение скорости; б) модуль приращения скорости; в) приращение модуля скорости.

7. Частица прошла за некоторое время 3/4 окружности со средним значением модуля скорости $\langle v \rangle$. Найдите модуль средней скорости за то же время.

8. Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см из состояния покоя с постоянным тангенциальным ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Определите, через какое время полное ускорение точки составит угол 60° с направлением скорости.

9. Зависимость модуля скорости частицы v от пройденного ею пути s определяется выражением $v = v_0 - bs$. Найдите зависимости s и v от времени.

Семинар 2
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА»

1. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с через 10 оборотов после начала вращения. Найдите угловое ускорение колеса.

2. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha t$, где $\alpha = 0{,}02$ рад/с^3. Определите, через сколько времени после начала движения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол 60° с ее вектором скорости.

3. Колесо радиусом 1 м катится без проскальзывания по горизонтальной дороге со скоростью 1 м/с. Точка A находится на ободе колеса на середине дуги, соединяющей точку касания и крайнюю левую точку колеса. Найдите модуль и направление ускорения точки A, а также полный путь, проходимый точкой A между двумя последовательными моментами ее касания поверхности.

4. Колесо радиусом 10 см вращается так, что угол поворота радиуса колеса зависит от времени по закону $\varphi = 2 + 2t^2 + t^3$ (все константы в СИ). Для точек обода колеса найдите в момент времени 2 с угловую скорость и угловое ускорение; нормальное и тангенциальное ускорение.

5. Диск вращается с угловым ускорением -2 рад/с^2. Определите, сколько оборотов сделает диск при изменении частоты вращения от 240 мин$^{-1}$ до 90 мин$^{-1}$; за какое время это произойдет.

6. Найдите радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость точки, лежащей на ободе колеса, в 2,5 раза больше скорости точки, лежащей на 5 см ближе к оси.

7. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t - 2t^3$ (все константы в СИ). Найдите угловое ускорение тела в момент остановки.

Семинар 3
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ»

1. Две точки движутся по законам $r_1 = 3ti + 4t^2j$, $r_2 = t^3i - 2t^2j$ (все числа в системе СИ). Найдите скорость и ускорение первой частицы относительно второй.

2. Две частицы, 1 и 2, движутся с постоянными скоростями $v_1 = 3$ м/с и $v_2 = 4$ м/с по двум взаимно перпендикулярным прямым. В момент $t = 0$ частицы находились на расстоянии 1 м (по горизонтали) друг от друга. Определите, через сколько времени после этого расстояние между частицами станет наименьшим, чему оно равно.

3. Имеются две моторные лодки, развивающие относительно воды скорость 5 м/с. Скорость течения воды одинакова по всей ширине реки и равна 0,5 м/с. Ширина реки – 1 км. Первая лодка пересекает реку по кратчайшему пути и возвращается обратно, а вторая проделывает путь 1 км по течению реки и возвращается обратно. Определите, какая лодка затратит меньше времени на свой путь.

4. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Скорость его подъема постоянна и равна v_0. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = a_y$, где a – постоянная, y – высота подъема. Найдите зависимости от высоты подъема:

а) величины сноса шара $x(y)$;

б) полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

5. Частица движется по радиусу вращающегося диска со скоростью 3 м/с. В начальный момент времени частица находится в центре диска. Угловая скорость вращения диска – 20 рад/с. Найдите приближенное значение пути, пройденного частицей в неподвижной системе отсчета, за десятую секунду движения.

Семинар 4
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ»

1. Тело массой 4 кг движется прямолинейно, при этом зависимость пройденного пути от времени описывается соотношением $S = 2 + 4t + 2t^2 - t^3/3$ (все константы в СИ). Определите силу, которая будет действовать на тело в момент остановки.

2. На полу лифта, ускоренно поднимающегося вверх, лежит груз массой 10 кг. Определите вес груза, если ускорение лифта составляет 10% от ускорения свободного падения.

3. Струя воды ударяется о неподвижную плоскость, установленную под углом 30° к направлению струи. Скорость струи – 20 м/с, площадь сечения – 5 см^2. Найдите силу давления струи на плоскость.

4. Начальная скорость пули – 800 м/с. При движении в воздухе за время 0,8 с скорость пули уменьшилась до 200 м/с. Масса пули – 10 г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определите коэффициент сопротивления.

5. На наклонной плоскости с углом наклона 45° к горизонту находится брусок массой 2 кг, на который действует горизонтальная прижимающая сила. Определите коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью, если брусок начинает скользить, когда сила становится равной 5 Н.

6. Однородная пластинка имеет форму круга радиусом 60 см, в котором вырезано круглое отверстие радиусом 25 см с центром, лежащим на середине вертикального радиуса пластинки. Определите положение центра масс этой фигуры.

7. Определите, за какое время тело, соскальзывая вдоль наклонной плоскости длиной 3 м, пройдет вторую половину пути, если угол наклона плоскости 30°, а коэффициент трения тела о плоскость равен 0,4.

8. Брусок массой 1 кг лежит на горизонтальной доске массой 3 кг. Коэффициент трения между бруском и доской – 0,1, между доской и горизонтальной поверхностью трение отсутствует. Определите, при какой минимальной силе, приложенной к доске, брусок начнет скользить по ней.

9. Через невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая нить с грузами одинаковой массой 1,4 кг. На один из грузов положен перегрузок массой 0,2 кг. Считая, что грузы первоначально находились на одном уровне и пренебрегая трением, определите разность высот, на которых грузы будут находиться через 1 с.

10. Определите положение центра масс полуокружности радиусом R.

Семинар 5
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ДИНАМИКА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)»

1. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы 30° и 45°, укреплен неподвижный блок. Бруски массами 1 кг и 2 кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Коэффициенты трения брусков о плоскости одинаковы и равны 0,08. Определите ускорения брусков.

2. Вертикальная поверхность, к которой приложен брусок массой $m = 1$ кг, движется ускоренно в горизонтальном направлении. Коэффициент трения между стенкой и бруском $\mu = 0,1$. Вычислите, при каком минимальном ускорении брусок не будет соскальзывать.

3. Установите характер зависимости периода обращения спутника, запущенного в экваториальной плоскости планеты, от плотности планеты. Считать, что высота спутника над поверхностью планеты много меньше ее радиуса.

4. Найдите зависимость силы трения, действующей на тело массой m, помещенное на наклонную плоскость, от угла, образованного плоскостью с горизонтом. Коэффициент трения между телом и плоскостью – μ. Привести качественный график полученной зависимости.

5. Автомобиль массой 5 т движется по выпуклому мосту с радиусом кривизны 70 м. Найдите силу давления автомобиля на мост в точке, направление на которую из центра кривизны моста составляет угол 30° с вертикалью. Скорость автомобиля – 72 км/ч.

6. Спутник движется по орбите, на которой сила тяготения на 19% меньше, чем на поверхности Земли. Определите, какова скорость спутника.

7. Радиус некоторой планеты – 3800 км, продолжительность суток на ней – 40 ч. Определите массу планеты, если на полюсе тела весят в 1,2 раза больше, чем на экваторе.

Семинар 6
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА»

1. Система состоит из двух тел с импульсами $p_1 = (2t + 3)i + 3t^2j + 7k$ и $p_2 = 2ti + tj$. Определите, сохраняется ли импульс системы; сохраняются ли какие-либо проекции этого импульса на декартовы оси координат; чему равна результирующая внешних сил, действующих на тела.

2. Два тела массами m и $2m$ скользят по гладкому горизонтальному столу во взаимно перпендикулярных направлениях. После абсолютно неупругого соударения они движутся вместе в направлении, составляющем угол α с направлением движения первого тела до соударения. Найдите отношение скоростей тел до удара.

3. Ракета начальной массой m_0 поднимается вертикально вверх с нулевой начальной скоростью. Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая поле тяготения однородным, запишите зависимость скорости ракеты от массы и от времени подъема.

4. Материальная точка массой m брошена под углом α к горизонту со скоростью v_0. Траектория полета частицы лежит в плоскости x, y. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите зависимость от времени момента силы, действующей на частицу, и момента импульса частицы.

5. Груз, подвешенный на невесомой нити длиной L в точке O_1, движется по окружности в горизонтальной плоскости (центр окружности – точка O) со скоростью v. Нить составляет угол α с горизонтом. Определите моменты импульса груза относительно точек O и O_1 и установите, сохраняются ли эти моменты.

6. Два тела массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 5$ кг, движущиеся свободно со скоростями $v_1 = 10i$ и $v_2 = 3i + 5j$, испытывают

абсолютно неупругое соударение. Определите скорость и импульс центра масс системы до и после удара.

7. Лодка стоит неподвижно на поверхности озера. На корме и на носу лодки на расстоянии L друг от друга сидят рыболовы. Масса лодки – m, массы людей – m_1 и m_2. Рыболовы меняются местами. Определите, на какое расстояние переместится при этом лодка, если сопротивлением движению лодки можно пренебречь.

Семинар 7
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ»

1. Пуля массой 10 г, летящая со скоростью 200 м/с, попадает в брусок массой 500 г, висящий на нити длиной 1 м, и застревает в нем. Определите, на какой угол отклонится нить; какое количество тепла выделится при ударе.

2. С вершины идеально гладкой полусферы радиусом 90 см соскальзывает небольшое тело. Вычислите, на какой высоте от основания полусферы тело оторвется от нее.

3. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = ax^2 + yz$ (a – положительная константа.). Определите силу, действующую на частицу.

4. Определите, потенциальна (консервативна) ли сила а) $F = 2xi - 3yj + 5zk$; б) $F = 2yi + 5x^2j$. В случае положительного ответа найдите потенциальную энергию.

5. С башни высотой 15 м под углом $\alpha = 30°$ к горизонту брошено тело массой 1 кг со скоростью 10 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите кинетическую и потенциальную энергию тела в момент времени 1,5 с.

6. Конькобежец, разогнавшись до скорости 18 км/ч, въезжает на горку с уклоном 30° на высоту 1 м. Определите коэффициент трения коньков о лед.

7. Зависимость потенциальной энергии тела в центральном силовом поле от расстояния задается формулой $U = (A/r^2 - B/r)$. Здесь A и B – положительные константы. Определите значение r, при котором сила, действующая на тело, максимальна, а также расстояние, соответствующее равновесному положению тела.

8. Шарик массой 16 г, движущийся горизонтально, столкнулся с шаром массой 0,8 кг, висящим на прямом невесомом недеформируемом стержне длиной 1,7 м. Определите скорость первого шарика, если в результате удара стержень отклонился на 30°. Удар считать упругим.

9. Шар, положенный на верхний конец спиральной пружины, сжимает пружину на 2 мм. Вычислите, на сколько сожмет пружину этот шар, брошенный вертикально вниз с высоты 15 см со скоростью 1,5 м/с. Диссипативных сил нет.

Семинар 8
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА»

1. Два груза массами 2 кг и 1 кг связаны нитью, перекинутой через блок массой 1 кг. Найдите ускорение тел и силы натяжения нитей.

2. Шар массой 2 кг катится по горизонтальной поверхности со скоростью 0,5 м/с. После удара о вертикальную стенку шар откатывается назад со скоростью 0,1 м/с. Определите количество тепла, выделившееся при ударе.

3. Стержень длиной 0,7 м и массой 1,8 кг вращается вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов. Угловая скорость стержня меняется по закону $\omega = t^2 + 2t$, все константы в СИ. Найдите момент сил, действующих на стержень в конце пятой секунды движения.

4. Однородный диск массой 4 кг и радиусом 0,5 м может вращаться вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. Пуля массой 10 г, летящая со скоростью 100 м/с в плоскости диска, попадает в край диска и застревает в нем. Найдите угловую скорость вращения диска после попадания пули.

5. Вертикально расположенный однородный стержень массой M и длиной L может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала пуля массой m, летевшая горизонтально, и застряла в стержне. В результате неупругого удара стержень отклонился на угол α. Считая $m << M$, найти а) скорость летевшей пули, б) приращение импульса системы «стержень-пуля». Определите, на какое расстояние от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс данной системы не изменился.

6. Однородный шар радиусом 5 см, вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью 60 рад/с, падает вертикально на шероховатую поверхность и отскакивает под углом 30° к вертикали, уже не вращаясь. Найдите скорость диска сразу после удара.

7. Сплошному однородному шару радиусом 10 см, лежащему на горизонтальной поверхности, сообщили скорость 7 м/с без вращения. Определите, при какой угловой скорости скольжение без качения перейдет в качение без скольжения.

Семинар 9
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «КОЛЕБАНИЯ»

1. Ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $a = -45\pi^2\cos 3\pi t$. Определите зависимость смещения этой точки от времени.

2. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой 2 Гц. В момент времени $t = 0$ смещение точки от положения равновесия 4 см, а скорость – 16π см/с. Запишите уравнение колебаний.

3. Материальная точка массой 10 г движется под действием внутренней силы $F = 2\cos\omega t$ (константы в СИ), при этом $\omega = 2\pi$ рад/с. Определите максимальную кинетическую энергию материальной точки.

4. Физический маятник в виде тонкого однородного стержня длиной 0,5 м совершает гармонические колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку подвеса, не совпадающую с центром масс. Определите, на каком расстоянии от точки подвеса должен находиться центр масс, чтобы частота колебаний была максимальна.

5. Тонкий обруч подвешен на вбитый в стенку гвоздь и совершает гармонические колебания с периодом 1,56 с в плоскости, параллельной стене. Определите радиус обруча.

6. Период колебаний математического маятника длиной L, подвешенного в неподвижной кабине лифта, равен T. Вычислите, как будет меняться период колебаний, если лифт начнет подниматься с ускорением $0{,}5g$, а затем затормозит с таким же по модулю ускорением.

7. При сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми амплитудами и близкими частотами получилось колебание, описываемое уравнением $x = 0{,}15\cos 2t\cos 48t$ (константы в СИ). Определите, каковы частоты складываемых колебаний и период биений результирующего колебания.

8. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях: $x = 0{,}2\sin\pi t$, $y = -0{,}1\cos\pi t$ (константы в СИ). Напишите уравнение траектории точки, изобразите ее на рисунке и определите модуль скорости точки как функцию времени.

Семинар 10
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ»

1. Логарифмический декремент затухания камертона, колеблющегося с частотой 100 Гц, составляет 0,002. Определите, через какое время амплитуда камертона уменьшится в 50 раз.

2. Энергия затухающих колебаний маятника за 1,5 мин уменьшилась в 75 раз. Определите коэффициент сопротивления среды, если масса маятника равна 200 г.

3. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой 800 Гц. Определите, чему равна резонансная частота этой системы, если собственная частота колебаний 802 Гц.

4. Груз массой 50 г, подвешенный на нити длиной 20 см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления – 0,02 кг/с. На груз действует вынуждающая сила $F = 0{,}1\cos\omega t$ (все единицы в СИ). Определите частоту вынуждающей силы, при которой наступает резонанс, и резонансную амплитуду.

5. Смещение от положения равновесия для частиц среды, находящихся на расстоянии 5 см от источника колебаний, через время $t = T/3$ равно половине амплитуды. Определите длину волны.

6. Бегущая плоская волна описывается уравнением $S(x,\ t) = 0{,}006\cos(1800t - 5{,}3x)$ см. Определите отношение максимальной скорости частиц среды к скорости волны.

7. Расстояние между соседними узлами стоячей волны, создаваемой камертоном в воздухе, равно 42 см. Принимая скорость звука в воздухе 340 м/с, определите частоту колебаний камертона.

8. Два электропоезда движутся навстречу друг другу со скоростями 20 м/с и 10 м/с. Первый поезд дает свисток, высота тона которого соответствует частоте 600 Гц. Определите частоту, воспринимаемую пассажиром второго поезда перед встречей поездов и после их встречи. Скорость звука принять 340 м/с.

Семинар 11
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ»

1. Полый шар вместимостью $V = 10$ см^3, заполненный воздухом при температуре $T_1 = 573$ К, соединили трубкой с открытой чашкой, заполненной ртутью. Определите массу m ртути, вошедшей в шар при остывании воздуха в нем до температуры $T_2 = 293$ К. Изменением вместимости шара пренебречь.

2. Газ в баллоне под давлением 3,1 МПа находился на складе при температуре 6 °C. Израсходовав половину газа, баллон внесли в помещение. Определите температуру в помещении, если давление газа стало 1,6 МПа.

3. Два сосуда, содержащие различные газы по одному киломолю в каждом, соединены трубкой с краном. В начальный момент кран закрыт, а давление в сосудах $p_1 = 100$ кПа, $p_2 = 200$ кПа. Вычислите, какое давление устанавливается после открытия крана. Температура постоянна.

4. Найдите плотность ρ газовой смеси водорода и кислорода, если их массовые доли w_1 и w_2 равны соответственно 1/9 и 8/9. Давление p смеси равно 0,3 МПа, температура $T = 500$ К.

5. В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 100 кПа находится смесь 10 г водорода и 16 г гелия. Найдите удельный объем смеси.

6. При нагревании идеального газа на 1 К при постоянном давлении его объем увеличился на 1/300 первоначального объема. Вычислите, какой была начальная температура газа.

7. В сосуде находится смесь $m_1 = 7{,}0$ г азота и $m_2 = 11$ г углекислого газа при температуре $T = 290$ К и давлении $p_0 = 1{,}0$ атм. Найдите плотность этой смеси, считая газы идеальными.

8. В вертикальном закрытом с обоих торцов цилиндре находится легкоподвижный поршень, по обе стороны кото-

рого – по одному молю воздуха. В равновесном состоянии при температуре $T_0 = 300$ К объем верхней части цилиндра в $\eta = 4{,}0$ раза больше объема нижней части. Вычислите, при какой температуре отношение этих объемов станет $\eta' = 3{,}0$?

9. Поршневым воздушным насосом откачивают сосуд объемом V. За один цикл (ход поршня) насос захватывает объем ΔV. Определите, сколько следует сделать циклов, чтобы давление в сосуде уменьшилось в η раз. Процесс считать изотермическим, газ – идеальным.

10. Идеальный газ расширяется по закону $pV^2 = \mathrm{const}$. Определите, нагревается или охлаждается при этом газ.

11. Газ, занимавший объем $V_1 = 12$ л под давлением $p_1 = 100$ кПа, был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Определите работу A расширения газа.

Семинар 12
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ»

1. При изохорном нагревании азота объемом 10 л давление изменилось на 0,1 МПа. Определите количество теплоты, сообщенное газу.

2. При изобарном расширении 14 г азота его объем увеличился вдвое. Определите изменение внутренней энергии, работу, совершенную газом при расширении, количество теплоты, сообщенное газу. Начальная температура азота – 27 °С.

3. Вычислите, какая работа совершается при изотермическом расширении водорода массой $m = 5$ г, взятого при температуре $T = 290$ К, если объем газа увеличивается в три раза.

4. Двухатомный газ расширяется изобарно, совершая работу 1 кДж. Найдите переданное газу количество теплоты.

5. 100 г азота находится при температуре 300 К. При изохорном охлаждении давление газа уменьшилось в 3 раза, а затем при изобарном расширении температура оказалась равной первоначальной. Изобразите эти процессы на pV-диаграмме и определите работу, совершенную газом, и изменение его внутренней энергии.

6. Многоатомный идеальный газ из одного и того же состояния расширяется один раз изотермически, а другой – изобарно. Работа расширения в обоих случаях одинакова. Начертите графики этих процессов и определите, в каком из них газ получил больше теплоты.

7. Газ расширяется от объема V_1 до объема V_2 один раз при постоянном давлении, другой – при постоянной температуре, а третий – без теплообмена с окружающей средой. Начертив графики процессов, сравните работу расширения газа и количество подведенной теплоты.

8. Некоторый двухатомный газ подвергают политропному сжатию, в результате которого давление возраста-

ет от 10 кПа до 30 кПа, а объем газа уменьшается от 2,5 л до 1 л. Определите показатель политропы и изменение внутренней энергии газа.

9. Определите удельные теплоемкости смеси газов, содержащей 1 г гелия и 2 г водорода.

Семинар 13
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА»

1. Определите, какая доля молекул кислорода при температуре 300 К имеет скорость в интервале от $(v_{в} - 1)$ до $(v_{в} + 1)$ м/с.

2. Используя функцию распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите закон, выражающий распределение молекул по энергиям теплового движения.

3. Используя функцию распределения молекул газа по относительным скоростям, определите число молекул, скорости которых меньше 0,002 наиболее вероятной скорости, если в объеме газа содержится $1{,}7 \cdot 10^{24}$ молекул.

4. Используя функцию распределения Максвелла по скоростям, найдите среднюю скорость молекул ($\int x^3 \exp(-ax^2)dx = 0{,}5a^{-2}$).

5. Определите среднюю квадратичную скорость молекул идеального газа, плотность которого при давлении 35 кПа составляет 0,3 кг/м^3.

6. Отношение концентраций кислорода и азота в воздухе на уровне Земли составляет примерно 0,27. Используя распределение Больцмана, определите это отношение на высоте 1 км. Температуру на уровне Земли и на высоте 1 км считать одинаковой и равной 0 °С.

7. Определите, на какой высоте в поле тяготения Земли давление воздуха уменьшается в два раза. Считать $T = 300$ К.

Семинар 14
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «КРИВЫЕ TS. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИИ В РАЗЛИЧНЫХ ПРОЦЕССАХ. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЭНТРОПИИ. КПД ЦИКЛОВ»

1. Изобразите на диаграмме pV изотермическое и адиабатическое расширение газа из состояния (p_1, V_1) в состояние с объемом V_2, а затем нарисуйте эти процессы на диаграмме TS.

2. Определите, как изменится статистический вес одноатомного идеального газа при: а) изотермическом увеличении его объема вдвое; б) при изохорном увеличении его температуры вдвое; в) при политропном увеличении объема вдвое по закону $TV^{3/4} = \text{const}$. Число молекул газа – N.

3. Кусок льда массой 200 г, взятый при температуре –10 °С, был нагрет до температуры плавления, расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до 10 °С. Определите изменение энтропии в ходе указанных процессов.

4. Идеальный двухатомный газ совершает процесс $p = p_о - \alpha V$ ($p_о = 10^6$ Па, $\alpha = 10^6$ Па/м^3). Вычислите, при каком значении объема газа энтропия будет максимальной.

5. Идеальный газ количеством 2 моль совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Определите КПД цикла, если точки 2 и 4 лежат на одной изотерме, начальная температура газа – 300 К, а максимальная температура в цикле – 500 К.

6. Определите изменение энтропии при изотермическом расширении азота массой 10 г, если его давление уменьшилось от 0,1 МПа до 50 кПа.

7. Кислород массой 100 г был изобарно нагрет так, что его объем увеличился в 2 раза, а затем изохорно охлажден так, что его давление уменьшилось в 2 раза. Определите изменение энтропии в ходе указанных процессов.

8. Один моль идеального газа совершает цикл Карно. Температура нагревателя 400 К. Найти КПД цикла, если при адиабатном сжатии совершается работа 2 кДж.

Семинар 15
ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА»

1. Давление кислорода равно 8 МПа, его плотность – 100 кг/м^3. Определите температуру газа, если он: а) идеальный; б) реальный. Поправки Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}136$ Н×м^4/моль^2, $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

2. Некоторый газ в количестве 1 кмоль занимает объем 1 м^3. При его расширении до объема 1,5 м^3 была совершена работа против сил межмолекулярного притяжения, равная 45,3 кДж. Определите для этого газа поправку a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

3. Азот в количестве 2 моль, занимавший при температуре 350 К объем 2 л, расширяется изотермически до объема 6 л. Принимая поправки Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}136$ Н·м^4/моль^2 и $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль, определите работу расширения газа и изменение его внутренней энергии.

4. Постройте графики зависимости внутренней энергии одного моля газа Ван-дер-Ваальса от температуры при постоянном объеме и от объема при постоянной температуре. Сравните эти кривые с соответствующими зависимостями для идеального газа.

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

СЕМИНАР 1

№ 1

$$\vec{r} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k}.$$

Найдем $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 4\vec{i} + \vec{j}.$

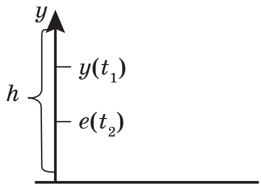
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i}\ ;$$

$$v_x = 4t\ ,\ v_y = 1 \Rightarrow |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\ ;$$

$$S = \int\limits_{t_1=9c}^{t_2=10c} |v|\ dt = \int\limits_{t_1=9c}^{t_2=10c} \sqrt{16t^2+1}\ dt \simeq \int\limits_{t_1=9c}^{t_2=10c} 4tdt = 2t^2\Big|_9^{10}$$

в интервале $[9c,\ 10c]\, v_x \gg v_y$.

№ 2

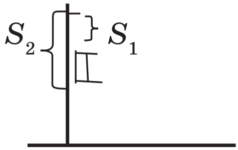


А. Пусть за пятую секунду

$$S = y(t_1) - y(t_2),$$

где $t_1 = 4$ с , $t_2 = 5$ с.

$$y = h - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow S = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2}.$$



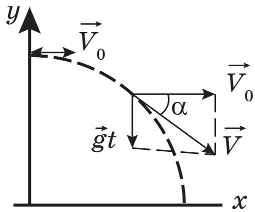
Б. Третий метр пути тело пройдет за время

$$t = t_2 - t_1,$$

где t_2 – время, за которое пройдено $S_2 = 3$ м;

t_1 – время, за которое пройдено $S_1 = 2$ м.

$$t = \sqrt{\frac{2S_2}{g}} - \sqrt{\frac{2S_1}{g}}.$$



№ 3

Через время t скорость составляет с горизонтом угол α:

$$\tan\alpha = \frac{gt}{v_0}.$$

Тогда нормальное ускорение

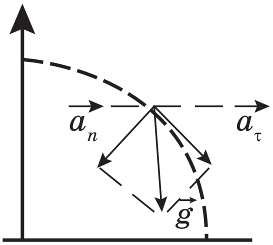
$$a_n = g\cos\alpha,$$

тангенциальное

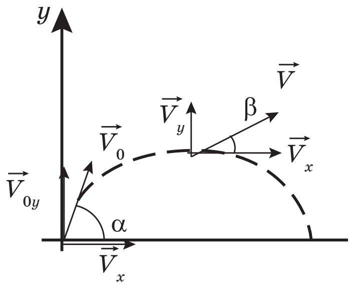
$$a_\tau = g\sin\alpha,$$

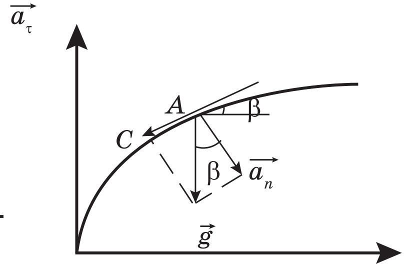
а радиус кривизны траектории

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 + g^2t^2}{g\cos\alpha}.$$



№ 4





$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha \\ v_y &= v_0 \sin\alpha - gt \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{в точке } A;$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \tan\beta\ ;$$

$$\frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \tan\beta \Rightarrow \text{находим } t.$$

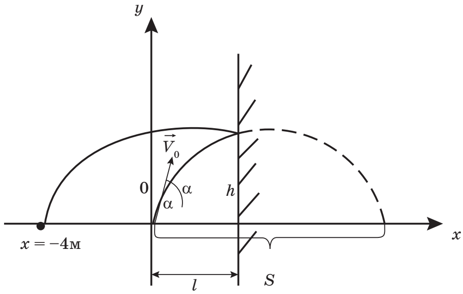
$$a_n = g\cos\beta\ ;$$

$$a_\tau = g\sin\beta$$

и $R = \dfrac{v^2}{g\cos\beta}$;

$$v^2 = \frac{v_x^2}{\cos^2\beta} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\ .$$

№ 5



$S = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = 10$ м $\to$ мяч упадет на 7 м от стенки, в точке с координатой $x = -4$ м.

Высоту удара найдем по уравнению траектории

$$y = x \ \tan\alpha - \frac{gx^2}{2\cos^2\alpha} \text{ при } x = l.$$

№ 6

$$\vec{v}_0 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}, \ \vec{v}_k = 7\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k};$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_k - \vec{v}_0 = 5\vec{i} - 6\vec{j} - 9\vec{k};$$

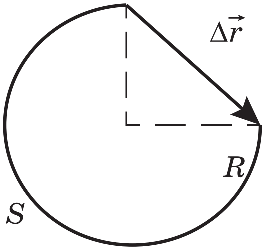
$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \sqrt{25 + 36 + 81} \quad \left(\sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2}\right);$$

$$\left|\vec{v}_0\right| = \sqrt{4 + 16 + 64}, \ \left|\vec{v}_k\right| = \sqrt{49 + 4 + 1};$$

$$\Delta\left|\vec{v}\right| = \left|\vec{v}_k\right| - \left|\vec{v}_0\right|.$$

№ 7

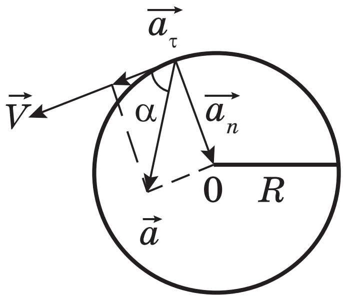
$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{S}{\text{t}} \\ \left|v\right| = \dfrac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\text{t}} \end{array}\right| \dfrac{\left|v\right|}{v} = \dfrac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\text{t}};$$



$$S = \frac{3}{4}2\pi r,\ \left|\Delta\vec{r}\right| = R\sqrt{2};$$

$$\left|\vec{v}\right| = \frac{R\sqrt{2}v}{\frac{3}{2}\pi r} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi r}v.$$

№ 8

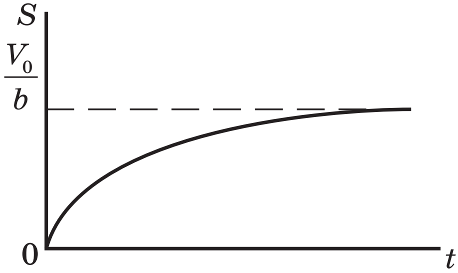


$$v = a_\tau t;$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\vec{v}^2 t^2}{R};$$

$$\tan\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{a_\tau{}^2 t^2}{R a_\tau}.$$

№ 9



$$v = v_0 - bs;$$

$$v = \frac{ds}{dt};$$

$\frac{ds}{dt} = v_0 - bs$, разделим переменные

$\frac{ds}{v_0 - bs} = dt,$ интегрируем, сделав замену:

$$dz = -bds \to \mathrm{z} = v_0 - bs;$$

$$-\frac{ds}{bz} = dt, \quad \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z} = -\int_0^t bdt \ \to \ \ln\frac{z}{z_0} = -bt, \quad z = z_0 e^{-bt};$$

$$z_0 = v_0 => v_0 - bs = v_0 e^{-bt};$$

$$s = \frac{v_0}{b}\left(1 - e^{-bt}\right).$$

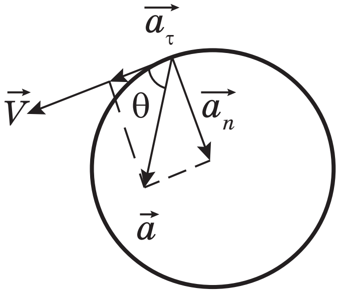
СЕМИНАР 2

№ 1

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\,\Delta\varphi,\ \Delta\varphi = 2\pi N;$$

$$\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi N}.$$

№ 2



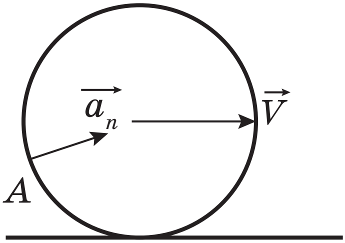
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},\quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt = \int_0^t \alpha t dt,$$

$$=> \omega = \omega_0 + \frac{\alpha t^2}{2};$$

$$\tan\theta = \frac{a_n}{a_\tau};$$

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= ER = \alpha t R \\ a_n &= \omega^2 R = \frac{\alpha^2 t^4}{4} R \end{aligned}\right\} \tan\theta = \frac{\alpha^2 t^4 R}{4\alpha t R} => \text{ находим } t.$$

№ 3



Ускорение точки – только центростремительное (нормальное), т.к. поступательное движение с постоянной скоростью [1].

$S=\int|v|dt$ за период оборота $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$;

$$v_x = v_0 - v_0\cos\omega t;$$

$$v_y = v_0 - v_0\sin\omega t;$$

$$|v|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2-2v_0^2\cos\omega t+v_0^2\cos^2\omega t+2v_0^2\sin^2\omega t};$$

$$S=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 2v_0\sin\frac{\omega t}{2}=2v_0\frac{2}{\omega}\left(-\cos\frac{\omega t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=8\frac{v_0}{\omega}=8R\ .$$

№ 4

$$\varphi = 2+2t^2+t^3;$$

$$\left.\begin{aligned}\omega &= 4t+3t^2;\\ \varepsilon &= 4+6t;\\ a_n = \omega^2 R,&\ \ a_\tau=\varepsilon R\end{aligned}\right| \Rightarrow \text{подставляем числа}\ldots$$

№ 5

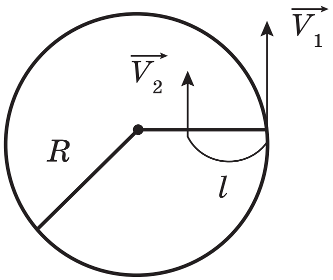
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\Delta\varphi;$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 2\pi\upsilon \\ \omega_0 &= 2\pi\upsilon_0 \\ \Delta\varphi &= 2\pi N \end{aligned}\right| \Rightarrow 4\pi^2\left(\upsilon^2 - \upsilon_0^2\right) = 2\varepsilon\Delta 2\pi N;$$

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t;$$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \ldots$$

№ 6



$$\left\{\begin{aligned} \upsilon_1 &= \omega R, \\ \upsilon_2 &= \omega(R - l) \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{R}{R - l} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2};$$

$$\upsilon_2 R = \upsilon_1 R - \upsilon_1 l;$$

$$R = \frac{\upsilon_1 l}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \ldots$$

№ 7

$$\varphi = 6t + 2t^2;$$

$\omega = 6 + 6t^2$ => в момент остановки $\omega = 0$; $t = 1$ с;

$$\varepsilon = -12t.$$

СЕМИНАР 3

№ 1

$$\vec{r}_1 = 3t\vec{i} + 4t^2\vec{j},\ \vec{r}_2 = t^3\vec{i} - 2t^2\vec{j};$$

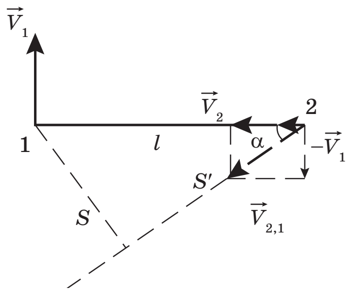
$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 8t\vec{j},\ \vec{v}_2 = 3t^2\vec{i} - 4t\vec{j};$$

$$\vec{v}_{1,2} = \left(3 - 3t^2\right)\vec{i} + 12t\vec{j}\ ;$$

$$\vec{a}_1 = 8\vec{j},\ \vec{a}_2 = 6t\vec{i} - 4\vec{j};$$

$$\vec{a}_{1,2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = 6t\vec{i} + 12\vec{j}.$$

№ 2



Точка 2 относительно 1 движется со скоростью ω .
$\vec{v}_{2,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ и кратчайшее расстояние между точкой 1 и линией, вдоль которой направлена $\vec{v}_{2,1}$ [2]:

$$S = l\sin\alpha = l\frac{v_1}{v_{1,2}};$$

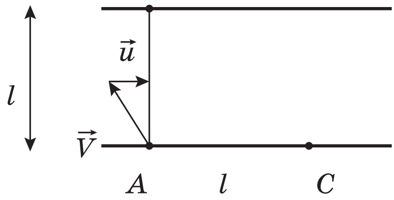
$$t = \frac{s'}{v_{1,2}} = l\frac{\cos\alpha}{v_{1,2}}.$$

№ 3

Для первой лодки

$$v_1 = \sqrt{v^2 - u^2},$$

$$t_1=\frac{2l}{\sqrt{v^2-u^2}}.$$

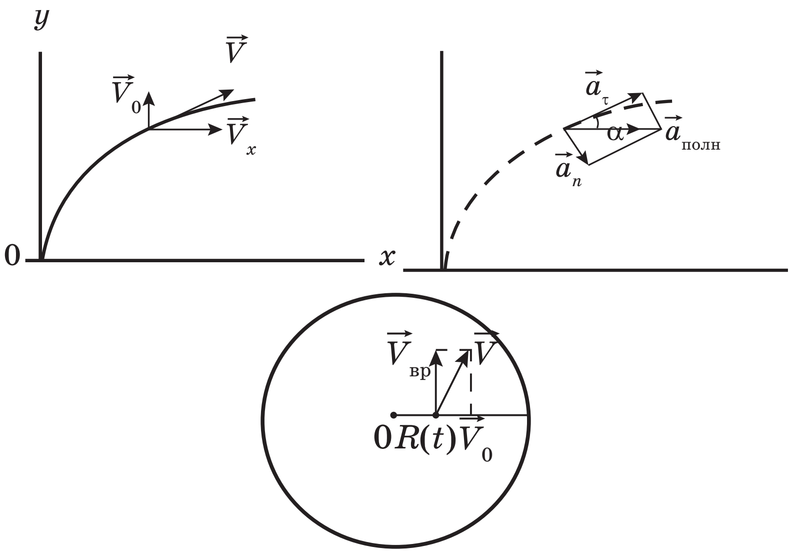


Для второй лодки

$$t_2=\frac{l}{v+u}+\frac{l}{v-u}=\frac{2lv}{v^2-u^2};$$

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{\sqrt{v^2-u^2}}{v}\langle \mathbf{1}=\rangle\, t_1<t_2.$$

№ 4



$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_x = \alpha_y \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \end{array}\right| => y = \upsilon_0 t;$$

$$\upsilon_x = \alpha \upsilon_0 t;$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \upsilon_0 t;$$

$$x = \int \alpha \upsilon_0 t dt = \frac{\alpha \upsilon_0 t^2}{2};$$

$$t = \frac{y}{\upsilon_0} => x = \frac{\alpha \upsilon_0 y^2}{2\upsilon_0};$$

$$\alpha_{\text{полн}} = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \alpha \upsilon_0 \quad \left(\upsilon_y = \text{const}\right);$$

$$\alpha_\tau = \alpha_{\text{полн}} \cos\alpha;$$

$$\alpha_n = \alpha_{\text{полн}} \sin\alpha;$$

$$\vec{\upsilon}_{\text{вр}} = \omega R\left(t\right) = \omega \upsilon_0 t;$$

$$\left|\upsilon\right| = \sqrt{\left(\omega \upsilon_0 t\right)^2 + \upsilon_0{}^2} = \upsilon_0 \sqrt{\omega^2 t^2 + 1}.$$

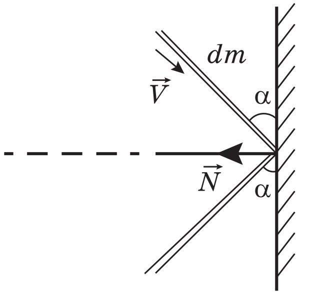
В интервале от 9 до 10 с

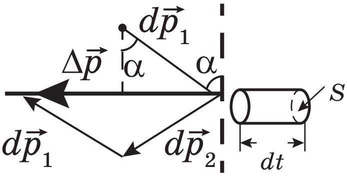
$$\omega t >> 1 \ => \left|\upsilon\right| \simeq \upsilon_0 \omega t;$$

$$S = \int_9^{10} \upsilon_0 \omega t dt = \upsilon_0 \omega \left.\frac{t^2}{2}\right|_9^{10}.$$

СЕМИНАР 4

№ 3





Сила, действующая на стенку, равна и противоположна силе, действующей со стороны стенки на струю $\vec{N}$, вызывающей изменение импульса струи $\Delta \vec{p}$ [3].

Выделим участок струи массой dm:

$$\Delta p = 2dm \cdot v \sin\alpha.$$

Масса воды dm, падающей за время Δt, равна

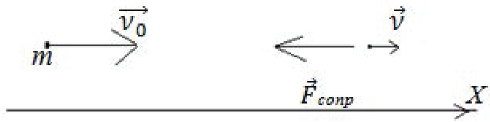
$$dm = \rho dV = \rho S v dt.$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{2\rho S v^2 \sin\alpha dt}{dt}.$$

№ 4

$\frac{mdv}{dt} = -\gamma v^2$ (II закон Ньютона в проекциях на O_x);

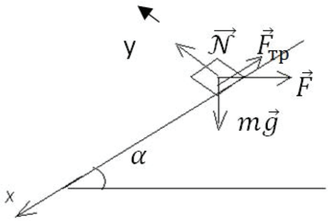
$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\gamma}{m} dt \,|\int \text{ интегрируем}$$



$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=-\frac{\gamma}{m}\int_0^t dt;$$

$$\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v}=-\frac{\gamma}{m}t \Rightarrow \gamma=\frac{m(v_0-v)}{tvv_0}.$$

№ 5



$$\vec{F}+m\vec{g}+\overrightarrow{F_{тр}}+\vec{N}=m\vec{a}.$$

При начале скольжения $a = 0$;

$$O_x: \quad mg\sin\alpha - F_{тр} - F\cos\alpha = 0;$$

$$O_y: N - F\sin\alpha mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = F\sin\alpha + mg\cos\alpha;$$

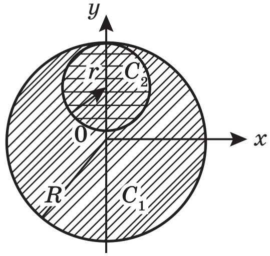
$$F_{тр}=\mu N \Rightarrow F_{тр}=\mu(F\sin\alpha+mg\cos\alpha).$$

Тогда из первого уравнения (по O_x):

$$F_{тр}=mg\sin\alpha-F\cos\alpha;$$

$$\mu=\frac{mg\sin\alpha-F\cos\alpha}{mg\cos\alpha+F\sin\alpha}.$$

№ 6



Представим сплошной диск как совокупность двух фигур: маленького диска радиусом r и фигуры с отверстием, у которой мы ищем центр масс. В силу симметрии центры масс всех фигур лежат на оси O_y, причем центр масс сплошного диска совпадает с началом координат: $y_c = 0$ [4]. С другой стороны:

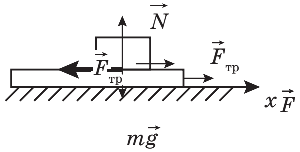
$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} + m_2 y_{c2}}{m_1 + m_2} = 0 \;\;=>\;\; y_{c1} = -\frac{m_2}{m_1} y_{c2}.$$

Здесь m_1 – масса фигуры с отверстием; m_2 – масса маленького диска.

Очевидно: $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2}$, т.к. фигуры однородны.

$$y_{c2} = \frac{R}{2} \text{ по условию } => \; y_{c1} = -\frac{r^2}{R^{2-} r^2} \cdot \frac{R}{2}.$$

№ 8



При отсутствии скольжения бруска по доске вся система движется с одинаковым ускорением; бруску это ускорение сообщает сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная вправо.

Для всей системы в целом силы трения $\vec{F}_{тр}$ (со стороны доски на брусок) и $\vec{F}'_{тр}$ (со стороны бруска на доску) являются внутренними и по III закону Ньютона ($\vec{F}_{тр} = -\vec{F}'_{тр}$) в сумме дадут 0 [5].

Тогда на ось O_x ($F_{тр}$ – максимальная сила трения покоя)

$$\begin{cases} F_{тр} = \text{м}N = ma & (\text{для бруска}); \\ F = (m+M)a & (\text{для доски с бруском}). \end{cases}$$

На O_y : $N - mg = 0 \quad => \quad F_{тр} = \mu mg$;

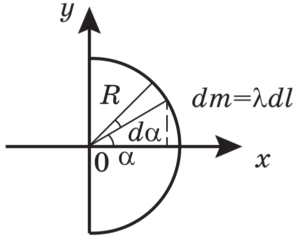
$$\mu mg = ma \quad => \quad a = \mu g;$$

$F = (m+M)\mu g$ – минимальная сила, при которой начинается скольжение.

№ 9

Задача о блоке с грузами (прибор Атвуда) рассмотрена в лекционном курсе.

№ 10



Радиус – вектор центра масс для системы точек

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}.$$

При непрерывном распределении массы перепишем в виде

$\vec{R}_c = \dfrac{\int \vec{r}dm}{\int dm}$ (интегрирование – по всему телу).

В силу симметрии центр масс полукольца лежит на оси O_x:

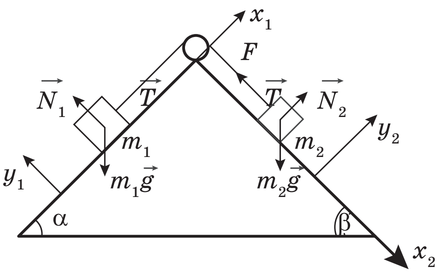
$$x_c = \frac{\int dmx}{m},\quad x = R\cos\alpha$$ – координата элемента dm.

Пусть элемент dm виден из центра полукольца под углом $d\alpha$, его длина $dl = Rd\alpha$, а масса $dm = \lambda dl$, где λ – линейная плотность массы $\lambda = \frac{m}{l} = \frac{m}{\pi R}$ для полукольца.

$$x_c = \frac{\int \frac{m}{l} Rd\alpha \cdot R\cos\alpha}{m} = \frac{mR^2}{\pi Rm}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos d\alpha = \frac{R}{\pi}\sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

СЕМИНАР 5

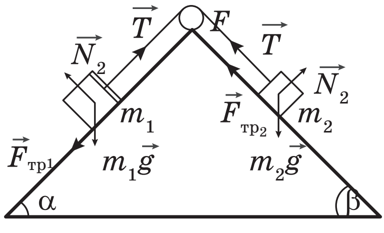
№ 1



Для того чтобы определить направление движения тел, а следовательно, правильное направление сил трения, сначала решим задачу так, как если бы трение отсутствовало. Предложим, что опускается правый груз.

$$\mathrm{O}_{x_2}: \; m_2 g\sin\beta - T = m_2 a \Rightarrow a = \frac{m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2} g;$$

$$\mathrm{O}_{x_1}: T - \; m_1 g\sin\alpha = m_1 a.$$

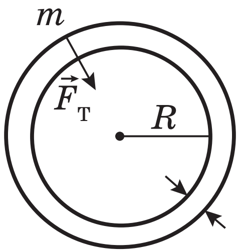


Убедившись в правильности выбора направления, изображаем силы трения и решаем с учетом того, что силы трения скольжения

$$F_{\text{тр}_2} = \mu m_2 g\cos\beta;$$

$$F_{\text{тр}_1} = \mu m_1 g\cos\alpha.$$

№ 3



Сила тяготения обеспечивает центростремительное ускорение спутника

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}\omega^2 R.$$

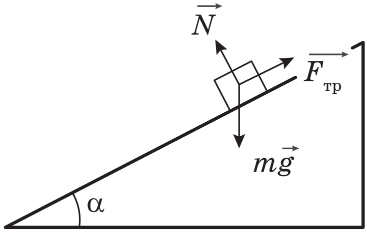
Угловая скорость ω связана с периодом обращения спутника соотношением $\omega = \dfrac{2\pi}{2}$, а масса планеты выражается π через ее плотность следующим образом:

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

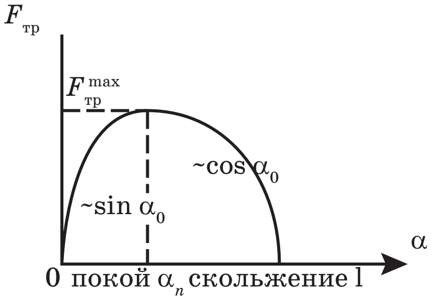
Тогда $\dfrac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \dfrac{4\pi^2}{T^2}R.$

Таким образом, $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}}.$

№ 4



При отсутствии скольжения



$$F_{тр.покоя} = mg\sin\alpha.$$

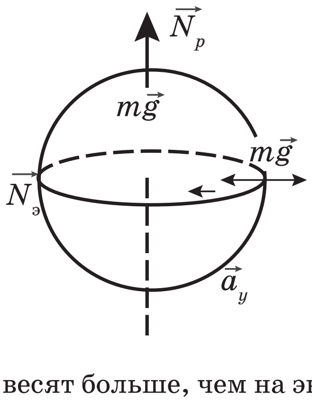
Скольжение начнется, когда сила трения покоя достигнет максимального значения

$$\mu mg\cos\alpha_0 = mg\sin\alpha_0;$$

$\tan\alpha_0 = \mu$ – условие начала скольжения.

Далее при скольжении $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha_0$.

№ 7



Тела на полюсе весят больше, чем на экваторе, поскольку на экваторе у тел есть центростремительное ускорение, связанное с вращением планеты:

$$\begin{cases} N_p = mg \\ N_э - mg = -ma_ц \end{cases} => \frac{N_p}{N_э} = -\frac{g}{g - a_ц}$$

(учитываем, что по III закону Ньютона вес P = силе реакции l).

$$\left.\begin{aligned} a_ц &= \frac{4\pi^2}{T^2}R \\ g &= \frac{GM}{R^2} \end{aligned}\right| \text{ По условию } \frac{N_p}{N_э} = 1{,}2;$$

$$g = 1{,}2\left(g - a_ц\right);$$

$$0{,}2g = 1{,}2a_ц;$$

$$g = 6a_ц;$$

$\dfrac{GM}{R^2} = 6\dfrac{4\pi^2}{T^2}R$, откуда найдем массу планеты.

СЕМИНАР 6

№ 1

$$\begin{cases} \vec{P} = (2t+3)\vec{i} \ +3t^2\,\vec{j} + 7\vec{k}; \\ \vec{P} = -2t\vec{i} + t\vec{j}. \end{cases}$$

Импульс системы

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 3\vec{i} \ + \left(3t^2 + t\right)\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Импульс системы зависит от t => не сохранится. Проекция импульса $P_x = 3$ и $P_x = 7$ не зависит от t => сохраняется.

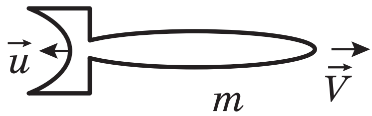
По II закону Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, в нашем случае не нулевая проекция импульса только на ось y:

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt}\ (3t^2 + \mathrm{t}) = 6t + 1.$$

№ 3

Задача о реактивном движении, т.е. движении тел переменной массы.

Общее уравнение Мещерского (вывод). Пусть ракета массы m движется за счет выброса газов со скоростью $\vec{U}$:



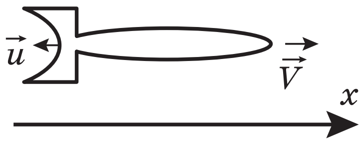
Запишем закон сохранения импульса dm – масса газа, выбрасываемого

$$m\vec{v} = \left(m - dm\right)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\left(\vec{v} + \vec{u}\right);$$

$$m\vec{v} = m\vec{v} - \underline{dm\vec{v}} + md\vec{v} - dmdv + \underline{dm.\vec{v}} + dm\vec{u};$$

$dmdv$ => 0 – более высокий порядок малости,

тогда $md\vec{v} \ = -\frac{dm}{dt}\vec{u};$



$m\vec{a} = -\mu\vec{u}$, $\mu = \frac{dm}{dt}$ – расход горючего.

На ось X: $ma = \mu u$.

Получили общее уравнение Мещерского.

В нашей задаче ракета взлетает в однородном поле тяготения:

$$m\frac{dv}{dt} = -mq + u\frac{dm}{dt};$$

$$m\frac{dv}{dt} + mq = u\frac{dm}{dt};$$

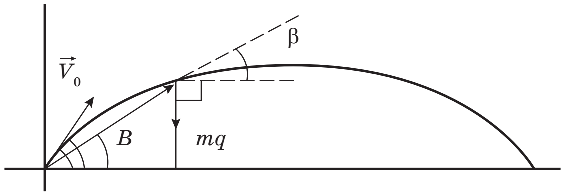
$$m\frac{d}{dt}(v + qt) = u\frac{dm}{dt};$$

$d(v + qt) = u\frac{dm}{dt}$, интегрируем

$v + qt = u\ln\frac{m}{m_0}$, m_0 – начальная масса ракеты,

$v = u\ln\frac{m}{m_0} - qt$ – получили зависимость v от массы и времени.

№ 4



Момент силы $M = rmq\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = mqr\cos\beta$.

Но $r\cos\beta = x = v_0 t\cos\alpha$, тогда $M = mqv_0 t\cos\beta$ – получили зависимость момента силы от времени.

Момент импульса $\vec{L}$ определяем из уравнения движения точки:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},\ d\vec{L} = \vec{M}dt.$$

Скаларно $dL = mqv_0\cos\beta \cdot tdt$.

Интегрируем $L = \frac{mqv_0 t^2}{2}\cos\beta$.

СЕМИНАР 7

№ 7

$$u=\left(\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}\right).$$

$\vec{F}=-qradu$ и зависит только от r.

$$F_r=-\frac{du}{dr}=\frac{2A}{r^3}-\frac{B}{r^2}.$$

В равновесии $F_r=0$.

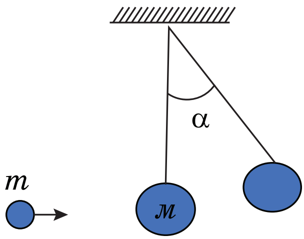
$$\frac{2A}{r^3}-\frac{B}{r^2},\ r=\frac{2A}{B}.$$

Найдем экстремум $F(r)$:

$$\frac{dF}{dr}=0,\ -\frac{6A}{r^4}+\frac{2B}{}=0.$$

$r=\dfrac{3A}{B}$ – при этом значении r сила максимальна.

№ 8



Удар упругий:

$$\begin{cases} mv=mv_1+Mv_2; \\ \dfrac{mv^2}{2}=\dfrac{mv_1^2}{2}+\dfrac{mv_2^2}{2}; \end{cases}$$

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}.$$

Отсюда найдем, как связаны v и v_2, v.

$$(1)\ m(v - v_1) = Mv_2;$$

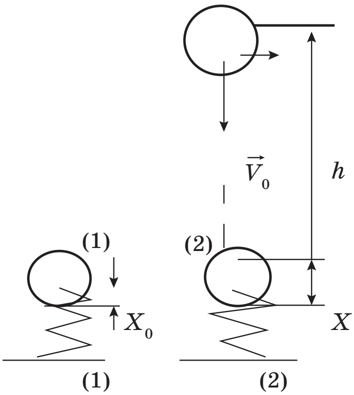
$$(2)\ m(v^2 - v_1^2) = Mv_2^2.$$

Делим (2) на (1), а для v_2 знаем, что $v_2 = \sqrt{2qh} = \sqrt{2ql(1-\cos\alpha)}$;

$$\begin{cases} v + v_1 = v_2, \\ v - v_1 = \dfrac{M}{m} v_2 \end{cases} \Rightarrow 2v = v_2 \frac{M+m}{m};$$

$$v = \frac{M+m}{2m}\sqrt{2ql(1-\cos\alpha)}.$$

№ 9



(1) $KX_0 = mq$ – условие равновесия в первом случае.

(2) $mq(h+x) + \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{kx}{2}$ – во втором случае.

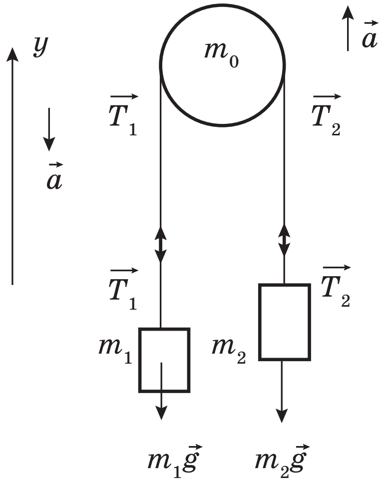
Из (1) находим $k\ \dfrac{mq}{x_0}$ и подставляем в (2):

$$mq\left(h+x\right)+\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mq}{2x_0}x^2\,|x\quad\frac{2x_0}{q};$$

$$2x_0\left(h+x\right)+\frac{x_0v_0^2}{q}=x^2x^2-2x_0x-\left(2x_0h+\frac{x_0v_0^2}{q}\right)=0\;=>\;\overrightarrow{T_1}=\pi r^2.$$

СЕМИНАР 8

№ 1



Массой блока здесь нельзя пренебречь, поэтому $\vec{T_1} \neq \vec{T_2}$, момент этих сил обеспечивает движение блока.

$$M = I\,\varepsilon,$$

где M – суммарный момент сил; I – момент инерции; ε – угловое ускорение.

Суммарный момент $\vec{M}$ в данном случае направлен «на нас» и равен

$$(T_1 - T_2)\,R = I\,\varepsilon;$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R}, \; I = \frac{m_0 R^2}{2}.$$

Таким образом, к уравнениям движения грузов

$$T_1 - m_1 g = -m_1 a\,;$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

добавляем уравнение

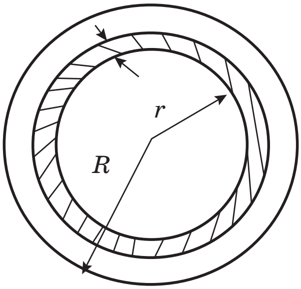
$$(T_1 - T_2)\,R = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{m_0 a}{2}.$$

Решая систему, находим

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}}\, g .$$

Дополнение 1

Вывод формулы момента инерции блока в виде цилиндра (диска)



$I = \int dmr^2$ для сплошных тел, dm – элемент массы, r – расстояние до оси вращения.

Из соображений симметрии удобно разделить диск на бесконечно тонкие кольца радиусом r шириной dr.

Если ввести поверхностную плотность массы $\sigma = \frac{dm}{ds}$, то масса тонкого кольца $dm = \sigma 2\pi r dr$ ($\pi r dr$ – площадь кольца), а $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$.

Тогда $I = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \pi \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}$.

Именно эту формулу использовали в задаче № 1.

Дополнение 2

Вывод формулы момента инерции стержня

Ось вращения проходит через середину однородного стержня перпендикулярно ему. Масса стержня m , длина l.

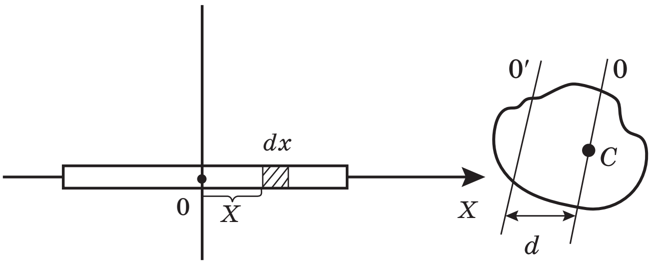
Разделим стержень на бесконечно малые элементы dx на расстоянии x от оси:

$$I = \int dm x^2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \lambda x^2 dx,$$

здесь $dm = \lambda dx$;

λ – линейная плотность материала:

$$\lambda = \frac{m}{l}.$$



Тогда

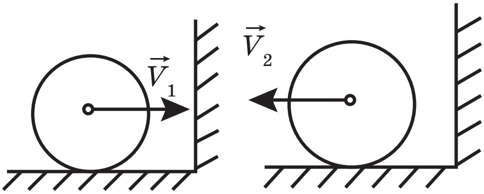
$$I = \lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{\lambda x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l}\left\{\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8}\right)\right\} = \frac{ml^2}{12}.$$

Если ось вращения проходит не через центр масс тела, то нужно пользоваться теоремой Гюйгенса–Штейнера:

$$I_{0'} = I_0 + md^2,$$

где $I_{0'}$ – момент инерции относительно произвольной оси; I_0 – момент инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела; d^2 – квадрат расстояния между осями.

№ 2



Количество тепла Q, выделившееся изменением кинетической энергии шара, причем *суммарной* кинетической энергии поступательного и вращательного движения:

$$Q = E_{к1} - E_{к2} = \left\{\frac{mv_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2}\right\} - \left\{\frac{mv_2^2}{2} + \frac{I\omega_2^2}{2}\right\},$$

где $\frac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения.

$$I = \frac{2}{5}mR^2, \ \ \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{5}mv^2.$$

СЕМИНАР 9

№ 2

Гармонический закон для смещения $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ для скорости

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0).$$

При $t = 0$,

$$x_0 = A\cos\varphi_0;$$

$$v_0 = A\omega\sin\varphi_0.$$

Отсюда $\tan\varphi_0 = \dfrac{-v_0}{x_0\,\omega}$; $A^2 = x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}$.

В нашем случае

$$\omega = 2\pi\nu = 4\pi;$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{16\pi}{4,4\pi} = 1;\ \varphi_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$A = \sqrt{4^2 + \frac{(16\pi)^2}{(4\pi)^2}} = 4\sqrt{2}\,(\text{см}) = 5,6\ \text{ см};$$

$$x = 5,6\cdot 10^2\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right),\ \text{м}.$$

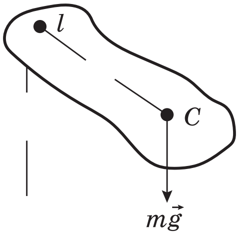
№ 4

Уравнение движения физического маятника

$$I\frac{d\omega}{dt} = -mg\cdot l\sin\alpha;$$

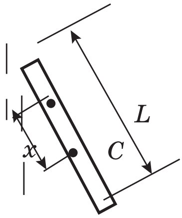
$I\alpha'' = mgl\alpha$ ($\sin\alpha \approx \alpha$ при малых углах);

$$\alpha'' + \frac{mgl}{I}\alpha;$$



$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{I}}\ .$$

В нашей задаче $I=\dfrac{mL^2}{12}+mx^2$ – по теореме Штейнера и $l=x$.



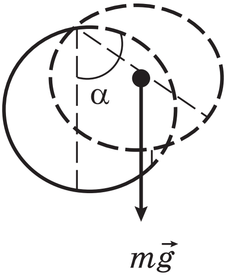
$$\omega=\sqrt{\frac{mgx}{\dfrac{mL^2}{12}+mx^2}} \Rightarrow \text{ ищем экстремум } \omega'=0\ .$$

$$\omega'=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{gx}{\dfrac{L^2}{12}+x^2}}}\left\{\frac{\dfrac{L^2}{12}+x^2-2x^2}{\left(\dfrac{L^2}{12}+x^2\right)^2}\right\}=0 \Rightarrow x=\frac{L}{\sqrt{12}}.$$

№ 5

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},\ \text{здесь}\ I=mR^2+mR^2\,;$$

mR^2 – момент инерции обруча относительно оси, проходящей через центр масс; R^2 – квадрат расстояния между осями.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \Rightarrow R = \frac{gT^2}{2\pi^2}.$$

№ 6

В лифте, ускорение которого направлено вверх, вес маятника увеличивается, $P=m\ (g+a)$, т.е. можно условно считать, что он находится в поле тяготения с эффективным ускорением $g^* = g + a$, тогда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}\ \text{– уменьшится.}$$

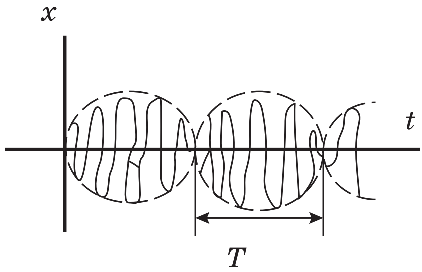
Если ускорение лифта вниз (в нашей задаче в случае замедленного движения), то получим следующую формулу:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}.$$

№ 7

При сложении колебаний с близкими частотами получаем биения

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega t \\ x_2 = A\cos\{(\omega+\Delta\omega)t\} \end{cases} \Rightarrow x = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2} + \cos\omega t.$$

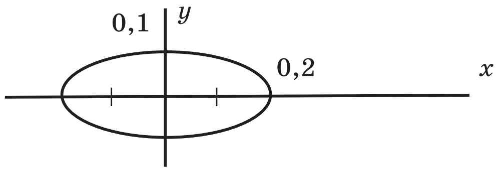


Сравнивая с нашим уравнением:

$$\Delta\omega = 4 \text{ рад/с}; \ \omega = 48 \ \text{рад/с}; \ T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{\pi}{2}, \ c.$$

№ 8

$$\left.\begin{array}{r} x = 0{,}2 \sin \pi t \\ y = -0{,}1 \cos \pi t A = \pi r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{0{,}2^2} + \frac{y^2}{0{,}1^2} = 1 \ \text{– уравнение эллипса.}$$



$$\left.\begin{array}{r} v_x = 0{,}2\pi \cos \pi t \\ v_y = 0{,}1\pi \sin \pi t \end{array}\right] v^2 = v_x^2 + v_y^2, \ v = 0{,}1\pi\sqrt{4\cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t}.$$

СЕМИНАР 10

Затухающие колебания

Закон движения $x = Ae^{-\beta t}\cos\frac{\Delta\omega}{2} + \cos(\omega t + \varphi_0)$,

где β – коэффициент затухания:

$\beta = \frac{\mu}{2m}$, где μ – коэффициент сопротивления среды.

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, где $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – собственная частота колебаний.

$\theta = \log\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$ – логарифмический декремент затухания, T – период.

№ 1

По условию $\frac{A_0}{Ae^{-\beta t}} = n = 50.$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-\beta t} = n, \beta t = \log n \\ \theta = \beta T = \frac{\beta}{\nu} \Rightarrow \beta = \theta\nu \end{array}\right\} t = \frac{\log n}{\beta} = \frac{\log n}{\theta\nu}.$$

№ 2

$$\frac{W_0}{W} = n = 75 \text{ по условию}$$

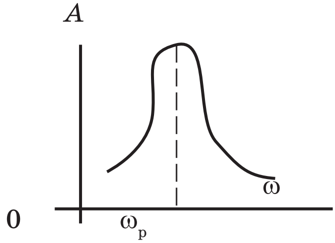
$$W \sim A^2 \Rightarrow \frac{A_0}{A} = \sqrt{n}.$$

С другой стороны, $\frac{A_0}{A} = e^{\beta t} \Rightarrow \beta t = \log\sqrt{n}$.

Коэффициент сопротивления среды

$$\mu = 2\beta m = 2m\frac{\log\sqrt{n}}{t}.$$

№ 3



При вынужденных колебаниях

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

1) $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$; ω_p – резонансная частота.

2) $\omega_{затух} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний.

Исключая β, получаем $\omega_p = \sqrt{2\omega_{затух}^2 - \omega_0^2}$.

$$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu_p = \sqrt{2\nu_з^2 - \nu_0^2}.$$

№ 4

$F_0 = \mathbf{0{,}1}H$ по условию

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}};\ \ \beta = \frac{\gamma}{2m};$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\gamma}{4m^2}}.$$

Подставляем в выражение для A:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{\mu\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\mu}{4m^2}}}.$$

СЕМИНАР 11

№ 1

Процесс изобарный

$$\frac{V}{T_1} = \frac{V - \Delta V}{T_2}, \ m_{\text{ртути}} = \rho \cdot \Delta V \approx 67 \text{ г.}$$

№ 2

а) $p_1 V = mRT_1$, $p_2 V = \dfrac{m}{2} RT_1$, $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{1}{2}$, $p_2 = \dfrac{p_1}{2}$;

б) в помещении

$$p_2 V = mRT_1, \qquad p_3 V = mRT_x,$$

$$T_x = T_1 \frac{p_3}{p_2} = T_1^2 \frac{p_3}{p_2} = 288 \text{ К.}$$

№ 3

$$\left.\begin{array}{l} p_1 V_1 = p_1' \left(V_1 + V_2\right) \\ p_2 V_2 = p_2' \left(V_1 + V_2\right) \end{array}\right] p = p_1' + p_2' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2};$$

$p_1 V_1 = p_2 V_2$, т.к. в каждом сосуде было одинаковое υ.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

$$p = \frac{p_1 \dfrac{V_1}{V_2} V_1 + p_2}{\dfrac{V_1}{V_2} + 1} = \frac{2 p_1 p_2}{p_1 + p_2} = 133 \text{ кПа.}$$

№ 4

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT,$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT} = \frac{mp}{\left(\frac{m}{9M_1} + \frac{8m}{9M_2}\right)RT};$$

$$m_1 = \frac{1}{9}m, \quad m_2 = \frac{8}{9}m.$$

№ 5

Удельный объем $V_{уд} = \frac{V}{m_1 + m_2}$;

$$V_{уд} = \frac{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT}{p\left(m_1 + m_2\right)} = \ldots$$

№ 6

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2};$$

$$V_2 = V_1 + \Delta V;$$

$$T_2 = T_1 + \Delta V;$$

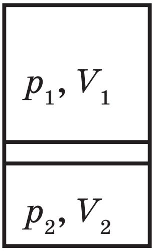
$$\frac{T_1 + \Delta T}{T_1} = \frac{V_1 + \Delta V}{V_1} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{1}{300};$$

$$T_1 = 300\Delta T = 300 \text{ К}.$$

№ 7

$\rho = \frac{p\left(m_1 + m_2\right)}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT}$ (как в № 4).

№ 8



$p_2 = p_1 + \Delta p$; Δp – давление поршня;

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\nu R T_0}{V_2} - \frac{\nu R T_0}{V_1};$$

$$V_1 = \eta V_2;$$

$$V = V_1 + V_2 = (1+\eta)V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{V}{1+\eta},\ V_1 = \frac{\eta V}{1+\eta};$$

$$\Delta p = \frac{\nu R T_0}{V}\left((1+\eta) - \frac{(1+\eta)}{\eta}\right) = \frac{\nu R T_0}{V}\left(\frac{\eta^2 - 1}{\eta}\right).$$

Для другой T аналогично

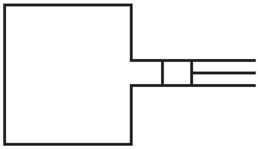
$$T_0 \frac{\nu R T_0}{\eta} = T \frac{\eta'^2 - 1}{\eta},\ T = T_0 \frac{\eta^2}{\eta'^2 - 1} \cdot \frac{\eta'}{\eta} \simeq 428\ K.$$

№ 9

$$p_0 V = p_1 (V + \Delta V);$$

$$p_1 = \frac{p_0 V}{V + \Delta V};$$

$$p_1 V = p_2 (V + \Delta V) \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 V}{V + \Delta V} = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V}\right)^2;$$



$$p_n = p_0^{\infty}\left(\frac{V^{\infty}}{V+\Delta V}\right)^{n^{\infty}} \Rightarrow \quad \ln n = \eta \ln \frac{V}{V+\Delta V};$$

$$\eta = \frac{\ln n}{\ln \dfrac{V}{V+\Delta V}}.$$

№ 10

$\begin{cases} pV^2 = \text{const} \\ \dfrac{pV}{T} = \text{const} \end{cases}$: делим $\Rightarrow VT = \text{const} \Rightarrow$ при расширении T уменьшается.

№ 11

$$A = p\Delta V = p\left(V_2 - V_1\right) = p\left(V\frac{T_2}{T_1} - V_1\right) = pV_1\frac{T_2 - T_1}{T_1}.$$

СЕМИНАР 12

№ 1

$$Q = \Delta U \quad (V = \text{const}, A = 0);$$

$$Q = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{i}{2}V\Delta p,\ i = 5.$$

№ 2

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T,\ \ T_2 = 2T_1\,(p = \text{const}, A = 0) => \Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R(2T_1 - T_1);$$

$$A = p\Delta V = \nu R\Delta T = \frac{m}{M}R\Delta T;$$

$$Q = \Delta U + A = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}R\Delta T.$$

№ 3

$$A = \int p\Delta V = \int_{V_1}^{V_2}\frac{p_0V_0}{V}\ln\frac{V_2}{V_1} = \nu RT_0\ln 3;$$

$$\nu = \frac{m}{M}.$$

№ 4

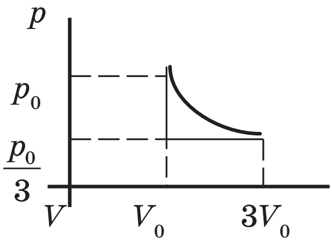
$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V;$$

$$p\Delta V = \nu R\Delta T;$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}A;$$

$$Q = \frac{i+2}{2}A = 3{,}5\ \text{кДж}.$$

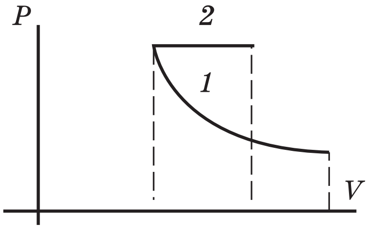
№ 5



$$A = \frac{p_0}{3}\left(3V_0 - V_0\right) = \frac{2p_0V_0}{3} = \frac{2}{3}\frac{m}{M}RT_0;$$

$$\Delta U = 0.$$

№ 6



$$Q_1 = A,\ \ \Delta U = 0;$$

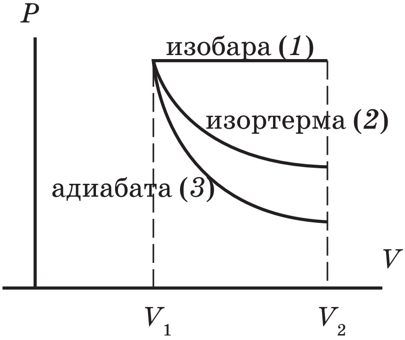
$$\Delta U = \frac{1}{2}\nu R\Delta T = \frac{1}{2}A;$$

$$Q_2 = \frac{i+2}{2}A;$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{i+2}{2};$$

$$i = 6 \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = 4.$$

№ 7



A – площадь под кривой

$$A_1 > A_2 > A_3 .$$

$$Q_3 = 0,\ \Delta U_2 = 0,\ \ A_2 = Q_2,\ =>$$

наибольшее Q_1 – в первом процессе.

№ 8

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n;$$

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n = \frac{p_2}{p_1};\ \ n = \frac{\ln\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)};$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{1}{2}\left(p_2 V_2 - p_1 V_1\right).$$

№ 9

$$Q = Q_1 + Q_2;$$

$$C_V m \Delta T = C_{V1} m_1 \Delta T + C_{V2} m_2 \Delta T;$$

$$C_{V1} = \frac{i}{2}\frac{R}{M_1}, \; C_{V2} = \frac{i}{2}\frac{R}{M_2}$$ – удельные;

$$C_V = \frac{\frac{i}{2}R\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)}{m_1 + m_2},$$ аналогично C_p.

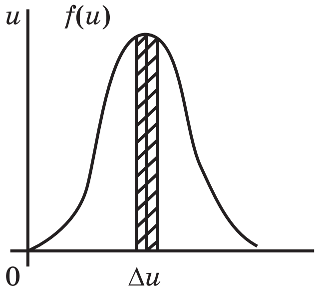
СЕМИНАР 13

№ 1

Сначала найдем наивероятнейшую скорость $V_{\text{вер}} = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$ для кислорода при 300 К.

$V_{\text{вер}} \simeq 395$ м / с => интервал $\left[V_{\text{вер}} - 1,\ V_{\text{вер}} + 1\right]$ достаточно мал.

$$\int\limits_{V_{в}-1}^{V_{\text{вер}}} f(V)\,dV \to f\left(V_{\text{вер}}\right)\Delta V.$$



Перейдем к распределению по относительным скоростям $f(u)du = \dfrac{4}{\sqrt{p}} u^2 e^{-u^2} du$.

Наш интервал тогда $\left[1 - \dfrac{1}{V_{\text{в}}},\ 1 + \dfrac{1}{V_{\text{в}}}\right]$.

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u)\Delta u = \frac{4}{\sqrt{p}} 1^2 e^{-1^2}\ \frac{2}{V_{\text{в}}} \simeq 4 \cdot 10^{-3}.$$

№ 2

Найдем функцию распределения по тепловым энергиям:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2};$$

$$f(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}} dv;$$

$$v^2 = \frac{2\varepsilon}{m}, \quad dv = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon m}} d\varepsilon;$$

$$f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon.$$

№ 3

$$\frac{\Delta N}{N} = \int\limits_0^{u_{\max}} f(u)du, \quad u_{\max} = 0{,}002;$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \int\limits_0^{u_{\max}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du.$$

Разложим $e^{-u^2} \simeq 1 - u^2$:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int\limits_0^{u_{\max}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2\left(1-u^2\right)du \simeq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} u_{\max}^3;$$

$\Delta N = 10^{16}$.

№ 4

Найдем сначала относительную среднюю скорость

$$\langle u \rangle = \int\limits_0^{\infty} uf(u)du = \int\limits_0^{\infty} u\frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2 e^{-u^2} du \text{ , замена } u^2 = z;$$

$$\langle u \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} ze^{-z} dz.$$

По частям $(z\,e^{-z})' = e^{-z} - ze^{-z}$:

$$\int\limits_0^{\infty} ze^{-z}dz = \int\limits_0^{\infty} e^{-z}dz - ze^{-z} = -e^{-z}\Big|_0^{\infty} = 1;$$

$$=>\langle u\rangle=\frac{2}{\sqrt{\pi}},\quad \langle v\rangle=\langle u\rangle v_{\text{вер}}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

№ 5

$$v_{\text{ср.кв}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}},\qquad \frac{RT}{M}=\frac{pV}{m}=\frac{p}{\text{с}},$$

$$=>\ v_{\text{ср.кв}}=\sqrt{\frac{3p}{\text{с}}}=\ldots$$

№ 6

$$n=n_0e^{-\frac{Mgh}{RT}};$$

$$\frac{n_{0_2}}{n_{N_2}}=\frac{n_{0_{02}}}{n_{0N_2}}e^{-\frac{\left(M_{0_2}-M_{N_2}\right)gh}{RT}}\approx 0{,}26.$$

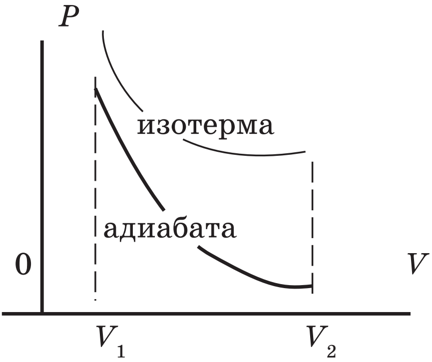
№ 7

$$\frac{p_0}{2}=p_0e^{-\frac{Mgh}{RT}}=>2=e^{\frac{Mgh}{RT}};$$

$$n=\frac{RT}{Mg}\log 2\simeq 5900\text{ м}.$$

СЕМИНАР 14

№ 1



№ 2

$\Delta S = k \log \dfrac{Q_2}{Q_1} >$ статистический вес.

а) Изотермический процесс:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta A}{T} = \int_{V_1}^{V_2} p \frac{dV}{T} = \upsilon R \log \frac{V_2}{V_1} =$$

$$= \upsilon N_A k \log \frac{V_2}{V_1} = k \log 2^N \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = 2^N.$$

б)

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta U}{T} = \upsilon C_V \int_{T_1}^{T_2} p \frac{dT}{T} =$$

$$= \frac{i}{2} \upsilon R \log 2 = k \log 2^{\frac{3}{2}N}, \;\; \frac{Q_2}{Q_1} = 2^{\frac{3}{2}N}.$$

в) Самостоятельно.

№ 3

$$\Delta S = \Delta S_{1\left(\substack{\text{нагревание}\\ \text{льда}}\right)} + \Delta S_{2\left(\substack{\text{плавление}\\ \text{льда}}\right)} + \Delta S_{3\left(\substack{\text{нагревание}\\ \text{оды}}\right)};$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}; \; \Delta S_1 = \int_{T_0}^{T_{\text{пл}}} \frac{mc_{\text{л}} dT}{T} = mc_{\text{льда}} \log \frac{T_{\text{пл}}}{T_0};$$

$$\Delta S_2 = \frac{m}{T_{\text{пл}}};$$

$$\Delta S_3 = mC_{\text{воды}} \log \frac{T_{\text{конечн}}}{T_{\text{пл}}}.$$

№ 4

max: $\dfrac{dS}{dV} = 0;$

$$dS = \frac{C_V dT}{T} + \frac{pdV}{T} = \frac{C_V dT}{T} + \frac{RdV}{V};$$

$$\frac{dS}{dV} = \frac{C_V}{T} \frac{dT}{dV} + \frac{R}{V};$$

$$\mathrm{T} = \frac{pV}{R} = \frac{(p_0 - \alpha V)V}{R} \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{R} - \frac{2\alpha V}{R};$$

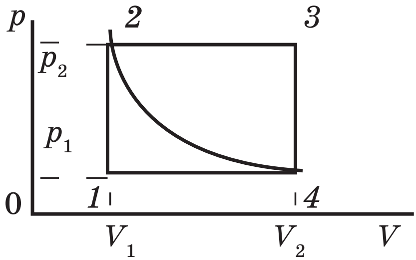
$$\frac{dS}{dV} = \frac{C_V}{T}\left(\frac{p_0}{R} - \frac{2\alpha V}{R}\right) + \frac{R}{V} = 0;$$

$$\frac{C_V}{TR}(p_0 - 2\alpha V) + \frac{R}{V} = 0; \; TR = V(p_0 - \alpha N);$$

$$\frac{C_V(p_0 - 2\alpha V)}{V(p_0 - \alpha V)} + \frac{R}{V} = 0;$$

$$V = \frac{(R + C_V)p_0}{\alpha(2C_V + R)}, \; C_V = \frac{R}{\mu - 1}; \; V = \frac{\mu p_0}{(1+\mu)\alpha}.$$

№ 5



Найдем $T = T_2 = T_4$.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ (процесс 1 – 2) } \frac{T}{T_1} = \frac{T_3}{T};$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_3}{T_4} \text{ (процесс 3 – 4) } T = \sqrt{T_3 T_1};$$

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = p_2V_2 + p_1V_1 - p_2V_1 - p_1V_2 = \upsilon R(T_3 - 2T + T_1);$$

$$Q_{1,2,3} = \Delta U_{1-3} + A_{1,3} = \frac{i}{2}\upsilon R(T_3 - T_1) + p_2(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{i}{2}\nu R(T_3 - T_1) + \upsilon R(T_3 - T);$$

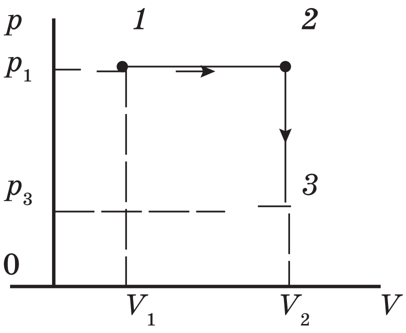
$$\eta = \frac{A}{Q_{1,2,3}} = \ldots$$

№ 6

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{pdV}{T} = R\frac{m}{M}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R \log\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} R \log\frac{p_1}{p_2} = \cdots$$

№ 7

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2;$$



$$\Delta S_1 = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{M} C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dV}{T} = \frac{m}{M} C_p \log \frac{T_2}{T_1} == \frac{m}{M} C_p \log \frac{V_2}{V_1};$$

$$\Delta S_2 = \int_2^3 \frac{m}{M} C_V \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_V \log \frac{T_3}{T_2} = \frac{m}{M} C_V \log \frac{p_3}{p_1};$$

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_p \log 2 + \frac{m}{M} C_V \log \frac{1}{2} = \frac{m}{M} \left(C_p - C_V \right) \log 2 = \frac{m}{M} R \log 2.$$

№ 8

$$A_{\text{адиаб.сжатие}} = \Delta U = \frac{3}{2} \upsilon R \left(T_1 - T_2 \right);$$

$$A_{\text{адиаб.сжатие}} = \Delta U \text{ – работа над газом;}$$

$$\eta = \frac{\left(T_1 - T_2 \right)}{T_1} = \frac{2\Delta U}{\upsilon R T_1} = \frac{2A_{\text{адиаб}}}{\upsilon R T_1}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном сборнике представлены задачи по механике и молекулярной физике. Изучение данного пособия позволяет студентам освоить основные методы решения физических задач. Отметим также, что полученные знания, умения и навыки потребуются студентам в дальнейшем, при изучении профильных предметов на старших курсах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2016.

2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. СПб.: Спец. лит., 2013.

3. Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике. 7-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2001.

4. Степанова В.А., Уварова И.Ф. Физика. Механика и молекулярная физика: учеб. пособие для практ. занятий. М.: Изд. Дом НИТУ «МИСиС», 2020. 104 с., № 3493.

5. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. 11-е изд., стереотип. М.: Издательский центр «Академия», 2006. 560 с.

Учебное издание

Мудрецова Людмила Вячеславовна
Рычкова Ольга Владимировна

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ЗАДАЧИ С УКАЗАНИЯМИ К РЕШЕНИЮ

Сборник задач

Корректор *В.В. Демидова*
Технический редактор *Т.В. Суханова*
Верстальщик *Ю.Б. Пашкова*

Подписано в печать 10.03.23 Уч.-изд. л. 5,125
Формат 60 × 90 1/16

Университет науки и технологий МИСИС,
119049, Москва, Ленинский пр-кт, д. 4, стр. 1

Издательский Дом НИТУ МИСИС,
119049, Москва, Ленинский пр-кт, д. 2А
Тел. 8 (495) 638-44-06

Отпечатано в типографии
Издательский Дом НИТУ МИСИС,
119049, Москва, Ленинский пр-кт, д. 4А
Тел. 8 (495) 638-44-16, 8 (495) 638-44-43