НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИСиС

Блохин Д. И., Мудрецова Л. В.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
# И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ

**для студентов заочной формы обучения**

**Раздел «Механика»**

Москва 2017

Методическое пособие предназначено для самостоятельной работы и контроля знаний по разделу «Механика» учебной дисциплины «Физика» студентов заочной формы обучения НИТУ «МИСиС».

В учебном пособии содержатся основные физические понятия и формулы из соответствующего раздела физики, включены примеры решения типовых задач. В конце пособия приведены варианты контрольных работ, выполнение которых необходимо для успешного прохождения промежуточной аттестации.

# ЧАСТЬ I

# 1.1. КИНЕМАТИКА

**Теоретический минимум**

Кинематика – это раздел механики, предметом которого является описание движения. Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой (частицей). Протяженное тело можно представить как систему материальных точек.

Положение в пространстве материальной точки задается радиус-вектором $\mathbf{r}$. Радиус-вектор – это вектор, проведенный из произвольно выбранной точки (начала отсчета) в данную точку. Поэтому его проекции на оси декартовой системы координат являются координатами $x$, $y$, $z$ данной точки:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z\,, \tag{1.1.1}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ – единичные векторы вдоль осей $x$, $y$ и $z$.

Зависимость радиус-вектора от времени $\mathbf{r}(t)$ называется законом движения. В декартовой системе координат закон движения определяют функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Вектор $\Delta\mathbf{r}$, проведенный из начальной точки 1 в конечную точку 2, называется перемещением $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Линия, вдоль которой движется материальная точка, называется её траекторией. Уравнение этой кривой называется уравнением траектории. Путь $S$ – это длина траектории. Закон движения может быть задан уравнением траектории и зависимостью пути от времени $S(t)$. В случае плоского движения уравнение траектории часто может быть представлено функцией $y(x)$. Например, уравнение параболы: $y = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$.

Скоростью $\mathbf{v}$ частицы называется производная от радиус-вектора по времени, которая обычно обозначается точкой:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \int \mathbf{v}\,dt\,. \tag{1.1.2}$$

Как и любой другой вектор, в декартовой системе координат:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\mathrm{v}_x + \mathbf{j}\mathrm{v}_y + \mathbf{k}\mathrm{v}_z .$$

Производная радиус-вектора $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{j}\dot{y} + \mathbf{k}\dot{z}$ (см. (1.1.1)), поэтому

$$\mathrm{v}_x = \dot{x}, \quad \mathrm{v}_y = \dot{y}, \quad \mathrm{v}_z = \dot{z}. \qquad (1.1.3)$$

Модуль скорости:

$$\mathrm{v} = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} . \qquad (1.1.4)$$

Для модуля скорости можно написать:

$$\mathrm{v} = \dot{S}, \quad |d\mathbf{r}| = dS, \quad S = \int \mathrm{v}dt , \qquad (1.1.5)$$

где $S$ – путь, пройденный частицей.

Ускорением $\mathbf{a}$ называется быстрота изменения скорости во времени:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \int \mathbf{a}dt , \qquad (1.1.6)$$

$$a_x = \dot{\mathrm{v}}_x, \quad a_y = \dot{\mathrm{v}}_y, \quad a_z = \dot{\mathrm{v}}_z , \qquad (1.1.7)$$

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \qquad (1.1.8)$$

Движение с постоянным по величине и направлению ускорением называется равноускоренным. В этом случае интегрирование в (1.1.6) и (1.1.2) дает формулы равноускоренного движения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2} , \qquad (1.1.9)$$

где $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$ – скорость и радиус-вектор в начальный момент времени $t = 0$. В проекции, например, на ось $x$ это означает:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_{0x} + a_x t, \quad x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} . \qquad (1.1.10)$$

Исключая время, т.е. подставляя из первого уравнения $t = (\mathrm{v} - \mathrm{v}_{0x})/a$ во второе, получаем:

$$\mathrm{v}_x^2 = \mathrm{v}_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) . \qquad (1.1.11)$$

В случае произвольного движения по кривой вектор ускорения $\vec{\mathbf{a}}$ можно разделить на две взаимно ортогональные части (Рис. 1.1.1):

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_\tau + \vec{\mathbf{a}}_n, \quad \vec{\mathbf{a}}_\tau \perp \vec{\mathbf{a}}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (1.1.12)$$

Здесь $a_\tau$ – тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории, которое является скоростью изменения модуля (величины) скорости:

$$a_\tau = \dot{\mathrm{v}}, \quad \mathrm{v} = \int a_\tau dt\,, \qquad (1.1.13)$$

$a_\tau$ (направлено вдоль v, если скорость увеличивается, и против v, если скорость уменьшается). Другая часть, $a_n$ – нормальное ускорение, не равное нулю и для равномерного движения вдоль кривой. Это ускорение направлено перпендикулярно касательной к траектории, характеризует изменение направления скорости и связано с радиусом $R$ кривизны траектории в данной точке соотношением:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R}\,. \qquad (1.1.14)$$

В частном случае равномерного движения по окружности нормальное ускорение называют еще центростремительным.

Если тангенциальное ускорение постоянно по величине, интегрированием в (1.1.13) и (1.1.5) с $a_\tau$ = const получаем формулы, аналогичные (1.1.9) – (1.1.11):

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + a_\tau t, \quad S = \mathrm{v}_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \quad \mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2 + 2a_\tau S\,, \qquad (1.1.15)$$

где $S$ – длина траектории.

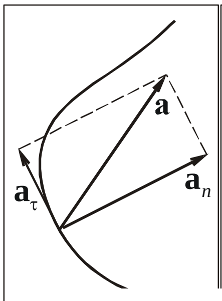

Рис. 1.1.1

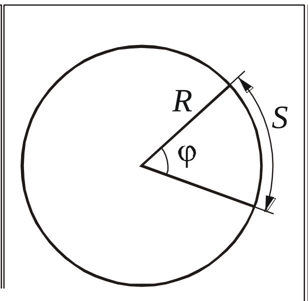

Рис. 1.1.2

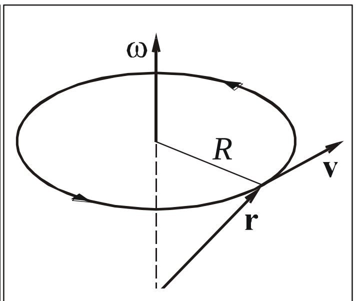

Рис. 1.1.3

Если материальная точка движется по окружности радиуса *R*, длина дуги *S* и угол поворота $\varphi$ связаны соотношением $S = \varphi R$, которое является определением угла в радианах (Рис. 1.1.2). Угловой скоростью ω называется производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \varphi = \int \omega dt \,. \qquad (1.1.16)$$

Угловая скорость $\vec{\omega}$ является векторной величиной и направлена по оси вращения (Рис. 1.1.3). Угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ называется быстрота изменения угловой скорости во времени:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}, \quad \vec{\omega} = \int \vec{\varepsilon}\, \mathrm{dt} \,, \qquad (1.1.17)$$

Связь между векторами скорости и угловой скорости такова:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}], \ \ \mathrm{v} = \omega R \,, \qquad (1.1.18)$$

крестик означает векторное произведение, $\vec{r}$ – радиус-вектор, *R* – радиус окружности (Рис. 1.1.3). Второе равенство в (1.1.18) получается дифференцированием соотношения $S = \varphi R$ . Если взять производную от первого равенства в (1.1.18), то по правилу дифференцирования произведения:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a} = [\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}] = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}].$$

Если ось вращения не меняет направления в пространстве, получившиеся два слагаемых равны тангенциальному и нормальному ускорениям (1.1.12):

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}], \quad a_\tau = \varepsilon R \,, \qquad (1.1.19)$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}], \quad a_n = \omega^2 R \,. \qquad (1.1.20)$$

Когда угловое ускорение не зависит от времени, вращение называют равноускоренным. В этом случае интегрирование в (1.1.17) и (1.1.16) с $\varepsilon = \overline{\mathrm{const}}$ дает формулы равноускоренного вращения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \,, \qquad (1.1.21)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0), \qquad (1.1.22)$$

последнее соотношение следует из первых двух (сравните это с (1.1.9) – (1.1.11), (1.1.5)).

Число оборотов $N$ связано с углом поворота $\varphi$ соотношением:

$$\varphi = 2\,\pi N, \qquad (1.1.23)$$

т.к. один оборот означает поворот на угол 2π. Частота вращения $n$, равная числу оборотов в единицу времени, связана с угловой скоростью $\omega$ соотношением:

$$\omega = 2\,\pi n, \qquad (1.1.24)$$

которое получается дифференцированием уравнения (1.1.23). Период вращения $T$ (время одного оборота):

$$T = 1 / n = 2\pi / \omega \qquad (1.1.25)$$

Единицы измерения в системе СИ скорости, ускорения, угловой скорости и углового ускорения: [v] = *м/с*, [$a$] = *м/с*$^2$, [$\omega$] = *1/с*, [$\varepsilon$] = *1/с*$^2$.

Размерность частоты $n$ формально совпадает с размерностью угловой скорости $\omega$ (см. (1.1.25)): [$n$] = *с*$^{-1}$.

Для различения этих величин иногда выписывают “размерность” угла (рад) и оборотов (об): [$\omega$] = *рад/с*, [$n$] = *об/с*.

Надо лишь иметь в виду, что радианы ($\varphi = R/S$) и количество оборотов по сути своей – безразмерные величины.

## Примеры решения задач

**Задача 1**.

Известен закон движения материальной точки: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{i}}\mathrm{A}t + \vec{\mathbf{j}}\left(\mathrm{B}t - \mathrm{C}t^2\right)$,

где A, B и C – положительные постоянные величины. Получить уравнение траектории. Найти зависимость от времени модуля скорости, модуля ускорения, нормального ускорения, тангенциального ускорения, радиуса кривизны траектории и угла между векторами скорости и ускорения.

*Решение:*

В соответствии с (1.1.1) записываем условие задачи в виде:

$x = \mathrm{A}\,t,\ y(t) = \mathrm{B}\,t - \mathrm{C}\,t^2,\ z = 0.$

Выражаем время $t = x/\mathrm{A}$ и подставляем в выражение $y(t)$, написанное выше. Получается уравнение траектории:

$$y = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}^2}x^2.$$

Это уравнение параболы, пересекающей ось x в точке A·B/C (см. Рис. 1.1.4), которая сразу находится из условия $y = 0$.

Проекции вектора скорости на оси x и y находятся в соответствии с (1.1.3): $\mathrm{v}_x = \dot{x} = \mathrm{A},\quad \mathrm{v}_y = \dot{y} = \mathrm{B} - 2\mathrm{C}t,\quad \mathrm{v}_z = 0$.

Модуль скорости согласно (1.1.4): $\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2}$ .

Ускорение в соответствии с (1.1.7) имеет одну компоненту:

$$a_y = \dot{\mathrm{v}}_y = -2C,\quad a_x = 0,\quad a_z = 0.$$

Таким образом, ускорение оказывается постоянным по величине и направленным против оси y. Его величина (1.1.8): $a = 2\mathrm{C}$.

Угол $\beta$ между векторами скорости $\vec{\mathbf{v}}$ и ускорения $\vec{\mathbf{a}}$ можно найти из определения скалярного произведения $(\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{a}}) = \mathrm{v}a\cos\beta$ и известного соотношения $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{a}} = \mathrm{v}_x a_x + \mathrm{v}_y a_y + \mathrm{v}_z a_z$:

$$\cos\beta = \frac{(\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{a}})}{\mathrm{v}a} = \frac{\mathrm{v}_y a_y}{\mathrm{v}a} = -\frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}} = -\frac{\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2}}.$$

Тангенциальное ускорение (1.1.13):

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2} = -2\mathrm{C}\frac{(\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2}} = -a\frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}}.$$

Нормальное ускорение по теореме Пифагора (1.1.12):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_y^2}{\mathrm{v}^2}} = a\frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} = \frac{2\mathrm{AC}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2}}.$$

Полученные соотношения могут быть проиллюстрированы Рис. 1.1.4, который сам по себе достаточен для нахождения тангенциального и нормального ускорений. Действительно, $|a_\tau| = a\sin\alpha$, $a_n = a\cos\alpha$, в то время как $\sin\alpha = v_y / v$, $\cos\alpha = v_x / v$, то есть

$$a_\tau = -a\frac{v_y}{v}, \quad a_n = a\frac{v_x}{v}.$$

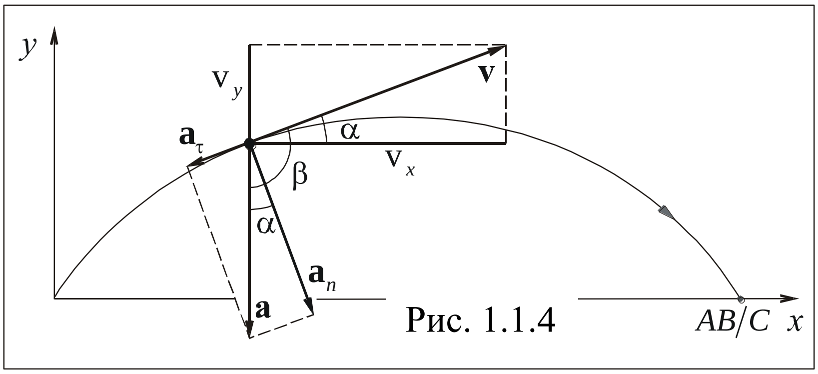

Рис. 1.1.4

При движении «вверх», когда $v_y > 0$, скорость v уменьшается и $a_\tau < 0$; когда $v_y < 0$, скорость увеличивается и $a_\tau > 0$. Таким образом, при получении тангенциального ускорения $a_\tau$ можно уклониться от выполнения дифференцирования модуля скорости. С помощью Рис. 1.1.4 можно найти и угол $\beta$ между скоростью и ускорением: $\beta = \pi/2 + \alpha$,

$$\mathrm{tg}\beta = -\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{v_x}{v_y} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t}.$$

Наконец, по формуле (1.1.14) найдем радиус кривизны траектории:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{a v_x} = \frac{\left(\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} - 2\mathrm{C}t)^2\right)^{3/2}}{2\mathrm{AC}}.$$

**Задача 2**.

Диск радиусом $R = 10$ *см* вращается с угловым ускорением $\varepsilon = \pi$ *рад/с*$^2$. Сколько оборотов сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 2$ *об/с* до $n_2 = 4$ *об/с* ? Найти время $\tau$, в течение которого это произойдет. Определить нормальное $a_n$ и тангенциальное $a_\tau$ ускорения точек на окружности диска в момент времени $t = \tau/3$. Определить угол $\alpha$ между векторами скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ в тот момент времени, когда диск вращался с частотой $n = 0{,}5$ *об/с*.

*Решение:*

Так как угловое ускорение постоянно и положительно, используем формулы равноускоренного вращения (1.1.21) – (1.1.22). Первое соотношение в (1.1.21) с учетом (1.1.24) сразу дает искомое время $\tau$:

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon\tau, \quad \tau = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\varepsilon} = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{\varepsilon} = 4\ c.$$

Полученное время $\tau$ можно просто подставить во второе соотношение (1.1.21) для нахождения угла поворота $\varphi$, а с учетом (1.1.23), – и числа оборотов $N$:

$$\varphi = \omega_1\tau + \frac{\varepsilon\tau^2}{2}, \quad N = n_1\tau + \frac{\varepsilon\tau^2}{4\pi} = 12.$$

Правильнее будет подставить полученное выше выражение $\tau = (\omega_2 - \omega_1)/\varepsilon$ в приведенную зависимость $\varphi(\tau)$, исключив время $\tau$ и выразив ответ через данные условия задачи. В результате этой процедуры получим формулу (1.1.22):

$$\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\varepsilon}, \quad N = \frac{\pi\left(n_2^2 - n_1^2\right)}{\varepsilon} = 12.$$

Тангенциальное ускорение согласно (1.1.19) оказывается постоянным:

$a_\tau = \varepsilon R = 0{,}31\ м/с^2$.

Для определения нормального ускорения по формуле (1.1.20) следует найти угловую скорость $\omega$ в момент времени $t = \tau/3$ с помощью (1.1.21):

$$\omega = \omega_1 + \varepsilon\frac{\tau}{3} = 2\pi\pi_1 + \varepsilon\frac{2\pi(n_2 - n_1)}{3\varepsilon} = \frac{2\pi}{3}(2n_1 + n_2),$$

$$a_n = \omega^2 R = \left[\frac{2\pi}{3}(2n_1 + n_2)\right]^2 R = 28{,}07\ м/с^2.$$

Угол $\alpha$ между векторами скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ можно найти, используя векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Тангенциальное ускорение $a_\tau$ направлено по касательной к окружности, т.е. так же, как и скорость v. Поэтому (см. Рис. 1.1.5): $tg\alpha = a_n / a_\tau = \omega^2 / \varepsilon$.

Подставляя сюда $\omega = 2\pi n$, получаем $tg\alpha = \pi$ (так как $n = 0,5$ *об/с* и $\varepsilon = \pi$ *рад/с*$^2$), $\alpha \approx 72°$.

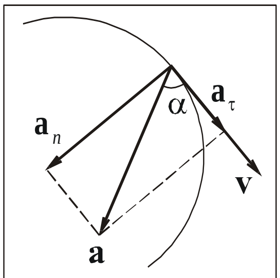

Рис. 1.1.5

## Задачи

1.1.01. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ *м/с*. Высота балкона над поверхностью земли $h = 12,5$ *м*. Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость <v> с момента бросания до момента падения на землю. Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.1.02. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2$ *м/с*, $B = –0,5$ *м/с*$^2$. Определить среднюю путевую скорость <v> движения точки в интервале времени от $t_1 = 1$ *с* до $t_2 = 3$ *с*.

1.1.03. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^3$, где $A = 6$ *м/с*, $B = –0,125$ *м/с*$^3$. Определить среднюю путевую скорость <v> точки в интервале времени от $t_1 = 2$ *с* до $t_2 = 6$ *с*.

1.1.04. С вершины высокой башни брошен камень в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 20$ *м/с*. Определить скорость, а также тангенциальное и нормальное ускорения камня через три секунды после начала движения. Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.1.05. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{i}}Ct + \vec{\mathbf{j}}Bt$, где $C = 3$ *м/с*, $B = 1$ *м/с*$^2$, $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$ – орты осей x и y. Найти уравнение траектории, а так же модуль скорости и ускорение в момент времени $t = 2$ *с*.

1.1.06. Закон движения материальной точки $\vec{r}(t) = \vec{i}Ct - \vec{j}Bt$, где $A = 10$ *м/с*, $B = 5$ *м/с*$^2$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей x и y. Найти угол между скоростью и ускорением в момент времени $t = 2$ *с*.

1.1.07. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ *м/с*$^2$. Определить полное ускорение а точки на участке кривой с радиусом кривизны $R = 3$ *м*, если точка движется на этом участке со скоростью $v = 2$ *м/с*.

1.1.08. Снаряд, выпущенный из орудия под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте $h$: спустя время $t_1 = 10$ *с* и $t_2 = 50$ *с* после выстрела. Определить начальную скорость $v_0$ и высоту $h$. Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.1.09. По дуге окружности радиусом $R = 10$ *м* движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки $a_n = 4{,}9$ *м/с*$^2$; в этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол $\alpha = 60^\circ$. Найти скорость v и тангенциальное ускорение $a_\tau$ точки.

1.1.10. Самолет, летевший на высоте $h = 2940$ *м* со скоростью $v = 360$ *км/ч*, сбросил бомбу. За какое время $t$ до прохождения над целью и на каком расстоянии $S$ от нее должен самолет сбросить бомбу, чтобы попасть в цель? Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

## 1.2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА. СИЛЫ

### Теоретический минимум

Системой отсчета называется совокупность неподвижных друг относительно друга тел, по отношению к которым рассматривается движение, и отсчитывающих время часов, в отличие от системы координат, которая является просто способом нумерации точек пространства (например, декартова система координат). Инерциальными называется системы отсчета, в которых свободные тела движутся равномерно прямолинейно. Первый закон Ньютона утверждает, что инерциальные системы отсчета существуют, то есть то, что определение инерциальных систем отсчета корректно.

Второй закон Ньютона является уравнением движения и заключается в пропорциональности ускорения тела действующей на него силе, $\vec{\mathbf{a}} \sim \vec{\mathbf{F}}$:

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}. \qquad (1.2.1)$$

Если на тело действуют несколько сил, то $\vec{\mathbf{F}}$ правой части является векторной суммой всех этих сил – равнодействующей:

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i . \qquad (1.2.2)$$

Коэффициент пропорциональности $m$ между ускорением $\vec{\mathbf{a}}$ и силой $\vec{\mathbf{F}}$ называется (инертной) массой. Таким образом, уравнение (1.2.1) является определением массы, а второй закон Ньютона утверждает, что это определение является корректным. Однако второй закон Ньютона отнюдь не является определением силы, поэтому силы должны быть и будут, описаны отдельно.

Произведение массы тела на скорость называется импульсом:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}} . \qquad (1.2.3)$$

Если масса тела не меняется, то $d\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)/dt = m\vec{\mathbf{a}}$ и уравнение (1.2.1) можно переписать так:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} . \qquad (1.2.4)$$

Это более общая форма записи второго закона Ньютона: если масса тела меняется, то остается верным именно уравнение (1.2.4), а не (1.2.1). Уравнение движения (1.2.4) позволяет найти изменение импульса, если известна зависимость действующей силы от времени:

$$\vec{\mathbf{p}}(t_2)-\vec{\mathbf{p}}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{\mathbf{F}}\,dt \ . \tag{1.2.5}$$

Интеграл в правой части называют импульсом силы. Таким образом, импульс силы равен изменению импульса.

Третий закон Ньютона говорит о взаимодействии тел. Он утверждает, что силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12}=-\vec{\mathbf{F}}_{21} \ , \tag{1.2.6}$$

где $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ – сила, с которой первое тело действует на второе, $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ – сила, с которой второе тело действует на первое, т.е. эти силы приложены к разным телам.

Два радиус-вектора $\vec{\mathbf{r}}'$ и $\vec{\mathbf{r}}$ одной и той же материальной точки в двух различных инерциальных системах отсчета $K'$ и $K$ связаны между собой преобразованием Галилея:

$$\vec{\mathbf{r}}'=\vec{\mathbf{r}}+\vec{\mathbf{v}}_{c0}t, \quad t'=t \ , \tag{1.2.7}$$

где $\vec{\mathbf{v}}_{c0}$ – скорость движения системы отсчета $K'$ относительно системы $K$. Принцип относительности Галилея говорит о том, что инерциальные системы отсчета:

а) существуют (т.е. включает в себя первый закон Ньютона);

б) движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно $\left(\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{c0}=0\right)$;

в) равноправны (все законы механики одинаковы в разных инерциальных системах отсчета).

Дифференцируя преобразование Галилея (1.2.7) по времени с учетом $\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{c0} = 0$, получаем закон сложения скоростей:

$$\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}_{c0}, \qquad (1.2.8)$$

который справедлив и для перехода между неинерциальными системами отсчета. Здесь $\vec{\mathbf{v}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$ – скорость тела в системе отсчета $K$, $\vec{\mathbf{v}}' = \dot{\vec{\mathbf{r}}}'$ – скорость этого же тела в системе $K'$. Инвариантность (одинаковость) законов Ньютона (1.2.1), (1.2.6) относительно преобразований Галилея как проявление равноправности инерциальных систем отсчета видна из второго дифференцирования преобразования (1.2.7): $\dot{\vec{\mathbf{v}}}' = \dot{\vec{\mathbf{v}}}$.
Любое тело в разных инерциальных системах отсчета имеет одинаковое ускорение.

Единица силы имеет свое название, в системе СИ это – «Ньютон» (*Н*). В соответствии с уравнением движения (1.2.1):

$[F] = [m][a] = кг{\cdot}м/с = Н.$

В классической механике все силы имеют гравитационную или электромагнитную природу.

Гравитационные взаимодействия подчиняются закону всемирного тяготения:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1.2.9)$$

где $m_1$ и $m_2$ – гравитационные массы взаимодействующих тел (материальных точек), $r$ – расстояние между ними, коэффициент пропорциональности:

$\gamma = 6{,}672{\cdot}10^{-11}\ Н{\cdot}м^2/кг^2$

называется гравитационной постоянной. Можно доказать, что формула (31) оказывается справедливой также для однородных шаров и сфер, тогда $r$ будет расстоянием между их центрами. Вследствие равенства (эквивалентности) инертной (1.2.1) и гравитационной (1.2.9) массы, эти величины сокращаются в левой и правой части второго закона Ньютона:

$$ma = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Эквивалентность проявляется в том, что все тела, независимо от массы $m$, в данном гравитационном поле обладают одинаковым ускорением:

$$a = \gamma \frac{M}{r^2} = g,$$

которое называется ускорением свободного падения. На поверхности Земли $g \approx 9{,}8$ *м/с*$^2$, что получается подстановкой массы и радиуса Земли.

Сила притяжения к Земле:

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}} \tag{1.2.10}$$

называется силой тяжести. Весом тела называется сила, с которой тело действует на опору или подвес. Таким образом, вес тела измеряется в ньютонах (а не килограммах). Вес тела далеко не всегда равен силе тяжести. Найдем, например, вес $\vec{\mathbf{G}}$ тела, движущегося вместе с опорой с ускорением $\vec{\mathbf{a}}$. По третьему закону Ньютона вес тела равен по величине силе реакции опоры $\vec{\mathbf{N}}$:

$$\vec{\mathbf{G}} = -\vec{\mathbf{N}}.$$

Из уравнения движения тела (1.2.1):

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = m\vec{\mathbf{g}} - \vec{\mathbf{G}},$$

находим вес:

$$\vec{\mathbf{G}} = m(\vec{\mathbf{g}} - \vec{\mathbf{a}}),$$

отличающийся от силы тяжести $\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}}$.

Тем не менее, в практической жизни часто используется техническая единица веса, подразумевающая тождество силы тяжести и веса. Это – килограмм – сила (*кГ* или *кгс*), равная силе, с которой тело массой *1 кг* действует на опору или подвес: *1 кГ* = *1кг*$\cdot g \approx$ *9.8 Н*. Такая единица измерения не может быть физической еще и потому, что ускорение свободного падения различно в разных точках земной поверхности (различие обусловлено рядом причин, например, несферичностью Земли, ее неоднородностью, вращением и т.д.). Для идеальной гири массой *1 кг* и «весом» *1 кГ* идеальные весы могут показать этот *1 кГ* только в единственной точке земной поверхности.

Силы, действующие на тела в электрических и магнитных полях, будут подробно рассматриваться в следующем разделе курса физики. Эти взаимодействия, гравитационные и электромагнитные, являются фундаментальными.

В механике изучаются также нефундаментальные силы: упругие силы, силы трения, силы реакции и др. (как правило, это силы, действующие в протяженных телах).

Под воздействием приложенных к телу сил всякое тело деформируется, т.е. изменяет размер и форму. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальную форму и размеры, деформация называется упругой. Возьмем пружину и закрепим один из ее концов. Под воздействием внешней силы $\vec{\mathbf{F}}_{\text{вн}}$, приложенной к другому ее концу, пружина растянется на величину $\Delta l$. Опыт показывает, что при малых деформациях удлинение пружины пропорционально растягивающей силе, $\Delta l \sim \vec{\mathbf{F}}_{\text{вн}}$. В состоянии равновесия внешняя сила будет уравновешена упругой силой $\vec{\mathbf{F}}_{\text{упр}}$, возникающей в пружине в результате деформации, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{вн}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\text{упр}}$. Поэтому упругая сила оказывается тоже пропорциональной удлинению пружины:

$$F = k\Delta l. \qquad (1.2.11)$$

Коэффициент пропорциональности $k$ называется коэффициентом жесткости пружины. Утверждение о пропорциональности между упругой силой и деформацией называется законом Гука. Этот закон справедлив для малых деформаций, т.е. когда

$$\Delta l \,/\, l_0 << 1,$$

где $l_0$ – длина тела (пружины) в недеформированном состоянии.

Теперь о силах трения. Различают сухое и вязкое трение. Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии прослойки называют сухим. В этом случае сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но и при попытках вызвать такое скольжение. В последнем случае она называется силой трения покоя. Согласно второму закону Ньютона, сила трения покоя равна по величине и противоположна по направлению внешней силе. При увеличении внешней силы сила трения покоя достигает своего максимального значения, и начинается скольжение. Сила трения скольжения почти не зависит от скорости скольжения и пропорциональна силе реакции опоры $\vec{\mathbf{N}}$:

$$F = \mu N, \tag{1.2.12}$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности $\mu$ называют коэффициентом трения.

Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой называется вязким. При небольших скоростях сила вязкого трения пропорциональна скорости тела:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\alpha\vec{\mathbf{v}}. \tag{1.2.13}$$

Знак минус означает, что эта сила направлена противоположно скорости. При больших скоростях сила вязкого трения начинает расти пропорционально квадрату скорости:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\beta \mathrm{v}\vec{\mathbf{v}}.$$

Отдельно остановимся на таком частном случае применения законов Ньютона, как описание равномерного движения по окружности. Равномерное криволинейное движение означает, что тело обладает нормальным ускорением $\vec{\mathbf{a}}_n$ (см. (1.1.14), (1.1.20)), направленным перпендикулярно скорости, в данном случае к центру этой окружности, то есть центростремительным ускорением:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \omega^2 R = a_{\text{цс}}.$$

Согласно второму закону Ньютона, это ускорение сообщает телу сумма действующих на него сил,

$$m\vec{\mathbf{a}}_{\text{цс}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i. \tag{1.2.14}$$

Эту сумму называют иногда центростремительной силой. Надо иметь в виду, что в природе не существует специальной центростремительной силы, ее роль выполняет какая-нибудь реальная наличествующая сила или сумма таковых. Например, для спутника на околоземной орбите в качестве центростремительной силы выступает сила тяжести $\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}}$

$$m\vec{\mathbf{a}}_{\text{цс}} = m\vec{\mathbf{g}},$$

откуда и получается формула для скорости такого спутника:

$$\text{v} = \sqrt{gR}, \qquad (1.2.15)$$

которая называется первой космической скоростью.

В отличие от центростремительной силы, специальная центробежная сила существует. Правда, появляется она в неинерциальной вращающейся вместе с телом системе отсчета, в которой само тело покоится. Эта центробежная сила инерции равна массе тела, умноженной на взятое с обратным знаком ускорение системы отсчета в данной точке:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{цб}} = -m\vec{\mathbf{a}}_{\text{цс}}.$$

Результат (37) может быть получен в неинерциальной системе отсчета, связанной со спутником. Уравнение движения спутника в этой системе отсчета:

$$m\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}}_{\text{цб}} + m\vec{\mathbf{g}}, \quad \vec{\mathbf{a}}' = 0.$$

Ускорение спутника $\vec{\mathbf{a}}'$ равно нулю, так как он покоится в сопутствующей ему системе отсчета.

## Примеры решения задач

**Задача 1.**

К пружинным весам подвешен легкий блок. Через него переброшена невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза массами по $M$ = *5 кг*. После того, как на один из грузов был поставлен перегрузок массой $m$ = *1 кг*, система пришла в движение. Определить: 1) ускорение тел $a$; 2) силу давления $f$ перегрузка на груз; 3) натяжение нити $T$; 4) показание пружинных весов $G$. Трение отсутствует.

*Решение:*

Данная в условии задачи система состоит, по крайней мере, из трех тел (см. Рис. 1.2.1), поэтому необходимо написать три уравнения движения (для каждого из этих тел):

$$M\vec{\mathbf{a}}_1 = \vec{\mathbf{T}}_1 + M\vec{\mathbf{g}},$$
$$M\vec{\mathbf{a}}_2 = \vec{\mathbf{T}}_2 + M\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{f}},$$
$$m\vec{\mathbf{a}}_3 = m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}}.$$

Если объединить два тела $M$ и $m$ справа в одно $M+m$, потеряем запрашиваемую информацию о силе давления $\vec{\mathbf{f}}$ перегрузка $m$ на груз $M$. Согласно третьему закону Ньютона, сила реакции опоры $\vec{\mathbf{N}}$, действующая со стороны груза на перегрузок, по величине равна силе давления $\vec{\mathbf{f}}$:

$$\vec{\mathbf{N}} = -\vec{\mathbf{f}}.$$

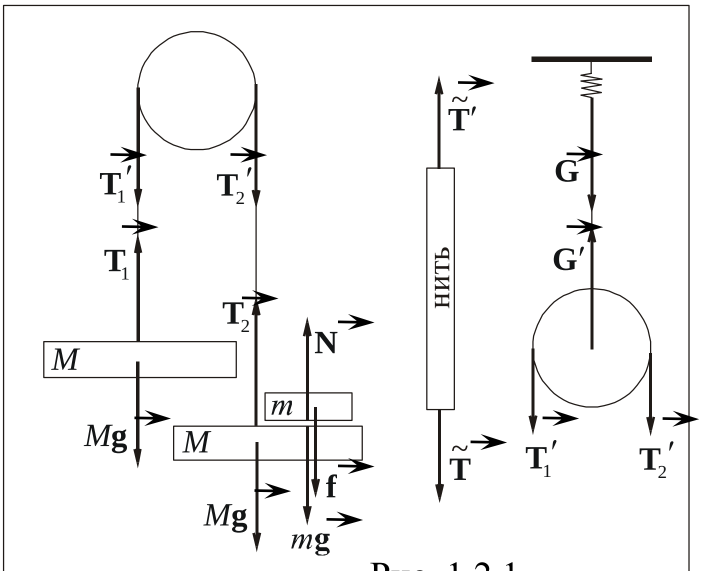

Рис. 1.2.1

Нерастяжимость нити означает равенство по величине смещений, следовательно, и ускорений левого и правого грузов: $\vec{\mathbf{a}}_1 = -\vec{\mathbf{a}}_2$. Правый груз и перегрузок движутся вместе: $\vec{\mathbf{a}}_3 = \vec{\mathbf{a}}_2$. Поэтому ускорения всех трех тел будем считать одинаковыми по величине:

$$a_3 = a_2 = a_1 = a.$$

Так как масса нити равна нулю, то

$$\vec{\mathbf{T}}_1 = -\vec{\mathbf{T}}_1', \vec{\mathbf{T}}_2 = -\vec{\mathbf{T}}_2'.$$

Это следует из уравнения движения нити, массу которой можно считать равной нулю (см. Рис. 1.2.1):

$$0=\vec{\tilde{\mathbf{T}}}+\vec{\tilde{\mathbf{T}}}',$$

(и третьего закона Ньютона $\vec{\tilde{\mathbf{T}}}=-\vec{\mathbf{T}}$, $\vec{\tilde{\mathbf{T}}}'=-\vec{\mathbf{T}}'$. Так как масса блока равна нулю и отсутствует трение:

$$\vec{\mathbf{T}}_1'=\vec{\mathbf{T}}_2'.$$

Таким образом, упрощающие предположения, зафиксированные в условии задачи, приводят к тому, что силу натяжения нити везде можно считать одинаковой по величине:

$$T_1=T_1'=T_2'=T_2=T.$$

Далее спроецируем уравнения движения наших тел на произвольно выбранные вертикальные оси, например, левого – на ось, направленную вверх, правых – на ось, направленную вниз (можно и по-другому, результат будет тот же):

$$\begin{cases} Ma=T-Mg, \\ Ma=Mg-T+f, \\ ma=mg-f. \end{cases}$$

Теперь в системе трех уравнений три неизвестных: *a*, *T* и *f*. Решая эту систему, получим:

$$a=\frac{m}{2M+m}g\approx 0.89\ \text{м/с}^2,$$

$$T=\frac{2M(M+m)}{2M+m}g\approx 53\ \text{Н},$$

$$f=\frac{2Mm}{2M+m}g\approx 0.91\,\text{кг}\cdot g\approx 8.9\ \text{Н}.$$

Обратите внимание на то, что вес перегрузка в процессе движения, равный силе $f$ по определению веса тела, меньше силы тяжести (0.91 < 1).

Осталось найти показания весов, к которым подвешен блок. Так как ось его неподвижна (к тому же он невесом), второй закон Ньютона для блока сводится к равенству нулю суммы всех действующих на него сил:

$$\vec{\mathbf{G}}' + \vec{\mathbf{T}}_1' + \vec{\mathbf{T}}_2' = 0,$$

то есть $G' = 2T$. Наконец, сила $\vec{\mathbf{G}}$, действующая на подвес, равная весу системы по определению веса:

$$\vec{\mathbf{G}} = -\vec{\mathbf{G}}'.$$

Чтобы это доказать, надо, как и для нити, рассмотреть участок системы от блока до пружины и использовать неподвижность этого участка. Поэтому показание пружинных весов, равное весу системы,

$$G = 2T = \frac{4M(M+m)}{2M+m} g \approx 1.1 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Обратите внимание на то, что вес системы отнюдь не равняется массе системы, умноженной на ускорение свободного падения:

$$G \neq (2M + m)g > G.$$

**Задача 2.**

Найти период вращения маятника, совершающего круговые движения в горизонтальной плоскости (Рис. 1.2.2). Длина нити равна $l = 1$ *м*. Угол $\alpha$, образуемый нитью с вертикалью, равен $30°$.

<u>*Решение:*</u>

Напишем уравнение движения груза на конце нити:

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{T}} + m\vec{\mathbf{g}},$$

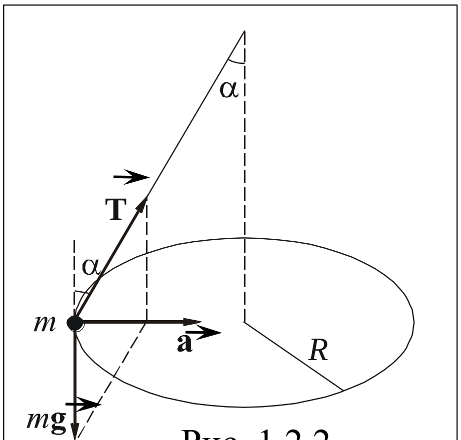


Рис. 1.2.2

где $\vec{\mathbf{T}}$ – сила натяжения нити. Так как груз совершает равномерное движение по окружности, векторная сумма действующих на него сил $\mathbf{T}+m\mathbf{g}$ направлена в центр этой окружности и равна массе груза $m$, умноженной на его ускорение $\mathbf{a}$, равное центростремительному (1.2.14):

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_{\text{цс}}.$$

Значит, проекция суммы сил на вертикальную ось равна нулю (проекция $\mathbf{a}_{\text{цс}}$ на эту ось равна нулю):

$$0 = T\cos\alpha - mg,\ T = mg/\cos\alpha.$$

Проекция уравнения движения на другую, горизонтальную ось,

$$ma_{\text{цс}} = T\sin\alpha,$$

с учетом известного выражения (1.1.20) $a = \omega^2 R$ и только что найденной силы натяжения нити, дает величину угловой скорости кругового движения:

$$\omega=\sqrt{g\,\mathrm{tg}\alpha/R}.$$

Используем связь радиуса окружности $R$ с данной в условии длиной нити $l$: $R = l\sin\alpha$. В результате находим угловую скорость:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}};$$

и период вращения:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}\approx 1.9\text{ с}.$$

Для малых углов $\alpha$, когда $\cos\alpha \approx 1$, период вращения такого маятника совпадает с периодом его свободных колебаний.

## Задачи

1.2.01. К пружинным весам подвешен блок, а через него перекинут нерастяжимый шнур, к концам которого привязаны грузы $m_1 = 3$ *кг* и $m_2 = 4$ *кг*. Пренебрегая массой блока и шнура, определить, что будут показывать весы при движении грузов. Трение отсутствует. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.2.02. На верхнем крае наклонной плоскости укреплён блок, через который перекинута нить. К одному концу нити привязан груз массой $m_1$, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце нити висит груз массой $m_2$. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha$; коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью $\mu$. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Вначале оба тела неподвижны. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10\ м/с^2$. Найти отношение $m_1 / m_2$, при котором груз $m_1$ начнёт: а) опускаться, б) подниматься.

1.2.03. Небольшое тело пустили вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в два раза меньше времени спуска. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10\ м/с^2$.

1.2.04. Два бруска массами $m_1 = 1\ кг$ и $m_2 = 4\ кг$, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением а будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу $F = 10\ Н$, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения $T$ шнура, соединяющего бруски, если силу $F = 10\ Н$ приложить к первому бруску? ко второму бруску? Трением пренебречь.

1.2.05. На гладком столе лежит брусок массой $T = 4\ кг$. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых $m_1 = 1\ кг$ и $m_2 = 2\ кг$. Найти ускорение $a$, с которым движется брусок, и силу натяжения $T$ каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь. Принять $g = 10\ м/с^2$.

1.2.06. Найти максимальную силу давления автомобиля массой $M$ = 3 т: 1) на выпуклый мост, 2) на вогнутый мост. Автомобиль движется с постоянной скоростью $v = 36\ км/час$. Радиус кривизны моста равен $R = 20\ м$. Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g = 10\ м/с^2$.

1.2.07. Камень массой $m = 0{,}5\ кг$, привязанный к шнуру длиной $L = 0{,}5\ м$, вращают с угловой скоростью $\omega = 6\ рад/с$ в вертикальной плоскости. Найти силу натяжения нити в верхней и нижней точках траектории. Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g = 10\ м/с^2$.

1.2.08. Доска массой $M = 5$ *кг* лежит на гладкой горизонтальной поверхности. На доску положен брусок массой $m = 1$ *кг*. Коэффициент трения между бруском и доской $k = 0,1$. С какой максимальной силой $F$, направленной горизонтально, можно тянуть доску, не нарушая неподвижности груза относительно доски? Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.2.09. Два бруска одинаковой массы $m = 1$ *кг* поставили на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 60°$. Коэффициент трения верхнего бруска о плоскость $\mu_1 = 0,1$; нижнего $\mu_2 = 0,5$. Определить силу взаимодействия брусков при их совместном соскальзывании с наклонной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.2.10. Через невесомый блок, укрепленной на ребре призмы, грани которой образуют углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 60$ с горизонтом, перекинута нить. К концам нити прикреплены грузы $m_1 = 1$ *кг* и $m_2 = 5$ *кг*, соответственно. Найти ускорение грузов и силу натяжения нити. Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

# 1.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

## Теоретический минимум

Из второго закона Ньютона (1.2.1), (1.2.4) прямо следует, что импульс тела (1.2.3) сохраняется, если сумма сил, действующих на тело, равна нулю:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = \overline{\text{const}}.$$

Импульсом системы тел называется векторная сумма импульсов $\mathbf{p}_i$ тел, составляющих систему:

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i\,. \tag{1.3.1}$$

Этот импульс можно представить произведением суммарной массы системы $m = \sum_i m_i$ на некоторую скорость $\mathbf{v}_\text{C}$, называемую скоростью центра масс:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_\text{C}\,, \quad \mathbf{v}_\text{C} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i}. \tag{1.3.2}$$

Центр масс – это точка, представляющая систему тел как целое согласно определению (42), или, эквивалентно,

$$\mathbf{r}_\mathbf{c} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}, \quad \mathbf{v}_\mathbf{c} = \frac{d\mathbf{r}_\mathbf{c}}{dt}, \tag{1.3.3}$$

где $\mathbf{r}_\text{C}$ – радиус-вектор центра масс. Второй закон Ньютона для системы тел получается суммированием уравнений движения для каждого из тел $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i$:

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i\,.$$

Силы в правой части можно разделить на внутренние и внешние:

$$\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_\text{внут} + \sum \mathbf{F}_\text{внеш}\,.$$

Согласно третьему закону Ньютона сумма внутренних сил равна нулю, $\sum \mathbf{F}_\text{внут} = 0$. Поэтому в уравнении движения системы тел остаются только внешние силы:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{\text{внеш}}. \qquad (1.3.4)$$

Системы, на которые не действуют внешние силы $\left(\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0\right)$, называются изолированными. Согласно уравнению движения (1.3.4), импульс изолированных систем сохраняется:

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{p} = \overline{\text{const}}.$$

Для сохранения импульса достаточно, чтобы сумма внешних сил равнялась нулю:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \mathbf{p} = \overline{\text{const}}. \qquad (1.3.5)$$

Такие системы называются замкнутыми. Сохранение импульса означает, что центр масс системы тел движется равномерно прямолинейно:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_{\mathbf{c}} = \overline{\text{const}} \;\; \Leftrightarrow \;\; \mathbf{v}_{\mathbf{c}} = \overline{\text{const}} \qquad (1.3.6)$$

Для сохранения проекции импульса на какую-либо ось надо, чтобы проекция суммы внешних сил на эту ось равнялась нулю:

$$\frac{dp_x}{dt} = \left(\sum F_{\text{внеш}}\right)_x = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; p_x = \text{const} \;\; \Leftrightarrow \;\; (\text{v}_\text{c})_x = \text{const}. \qquad (1.3.7)$$

## <u>Примеры решения задач</u>

**Задача 1.**

Лодка неподвижно стоит в озере. На корме и на носу лодки на расстоянии $l$ = *5м* друг от друга сидят рыболовы. Масса лодки $M$ = *50 кг*, массы рыболовов $m_1$ = *60 кг* и $m_2$ = *90 кг*. Рыболовы меняются местами. На какое расстояние $S$ переместится лодка относительно дна озера? Сопротивлением воды пренебречь.

*<u>Решение:</u>*

Решение этой задачи дает закон сохранения импульса (1.3.5) – (1.3.6). На систему тел «рыбаки – лодка» действуют внешние вертикальные силы тяжести и реакции опоры (воды), проекция которых на горизонтальное направление равна нулю. Поэтому (см. (1.3.7)) сохраняется горизонтальная проекция импульса системы, которая равна нулю, так как вначале лодка стояла в воде неподвижно. Это означает (см. (1.3.7)), что равна нулю и горизонтальная проекция скорости центра масс системы: как бы не передвигались рыбаки по лодке, центр масс системы не сдвинется относительно дна озера в горизонтальном направлении. Положение центра масс системы трех тел определяется формулой (1.3.3):

$$\vec{r}_c=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+M\vec{r}_3}{m_1+m_2+M},$$

или, в проекции на произвольную ось $x$:

$$x_\text{c}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+Mx_3}{m_1+m_2+M},$$

где $\mathbf{\vec{r}}_\text{c}$, $x_\text{c}$ – радиус-вектор и координата центра масс системы. В нашей задаче $m_1$, $m_2$, $\mathbf{\vec{r}}_1$, $\mathbf{\vec{r}}_2$, $x_1$, $x_2$ – массы, радиус-векторы и координаты рыбаков, $M$ – масса лодки, $\mathbf{\vec{r}}_3$ и $x_3$ – радиус – вектор и координата её центра масс.

Выберем ось $x$ горизонтальной с началом в месте расположения, скажем, первого рыболова до его перемещения (Рис. 1.3.1). Учитывая, что $x_1 = 0$, получаем:

$$x_\text{c}=\frac{m_2l+ML}{m_1+m_2+M},$$

где $x_2 = l$ – расстояние между рыбаками, $x_3 = L$ – расстояние от первого рыбака до центра масс лодки (см. Рис. 1.3.1). Последнее расстояние в условии задачи не задавалось и должно исчезнуть в конечной расчетной формуле.

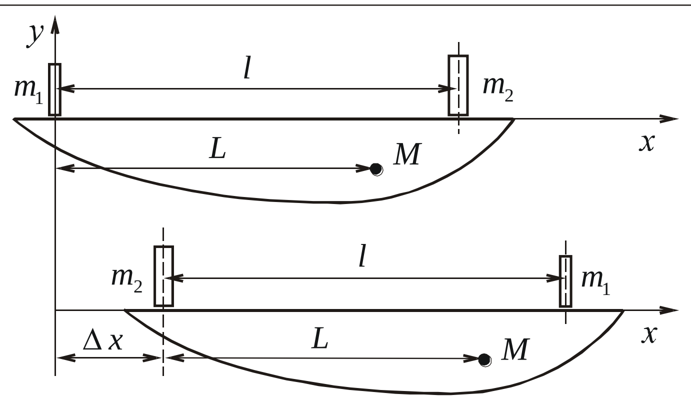


Рис. 1.3.1.

Теперь рыбаки поменялись местами, лодка передвинулась на $\Delta x$, а центр масс системы остался на прежнем месте:

$$x_c = \frac{m_1(l+\Delta x)+m_2\Delta x+M(L+\Delta x)}{m_1+m_2+M},$$

то есть

$$m_2 l + ML = m_1(l+\Delta x)+m_2\Delta x+M(L+\Delta x),$$

откуда

$$\Delta x = \frac{(m_2-m_1)l}{m_1+m_2+M}.$$

Если $m_2 > m_1$, то $\Delta x > 0$ и лодка передвигается вправо (как на рисунке), если $m_2 < m_1$, то $\Delta x < 0$ и лодка передвигается влево на такое же расстояние $S = |\Delta x|$. В нашей задаче $S = 0.75$ м.

__Задачи__

1.3.01. Шар, имеющий импульс $P_1 = 4\ Н\cdot с$, налетает на другой, неподвижный шар и после удара движется в направлении, перпендикулярном к первоначальному, имея импульс $P = 3\ Н\cdot с$. Найти импульс второго шара после удара.

1.3.02. Движущаяся частица распадается на две, импульсы которых $P_1 = 60\ Н\cdot с$ и $P_2 = 100\ Н\cdot с$ образуют угол $\alpha = 60$. Найти импульс распавшейся частицы.

1.3.03. Два тела, импульсы которых $P_1 = 120\ Н\cdot с$ и $P_2 = 160\ Н\cdot с$, движутся по взаимно перпендикулярным направлениям. После столкновения одно тело останавливается. Найти импульс второго тела.

1.3.04. Два тела движутся навстречу друг другу с одинаковой скоростью $v_0 = 30\ м/с$ каждое. Определить скорости этих тел после неупругого удара, если массы этих тел отличаются в два раза.

1.3.05. Протон, движущийся со скоростью $v_1 = 3\cdot10^7\ м/с$, налетает на неподвижную $\alpha-$частицу и отражается назад со скорость $v_2 = 1{,}8\cdot10^7\ м/с$.

Найти скорость $\alpha$ – частицы после соударения, если ее масса в четыре раза больше массы протона.

1.3.06. На полу стоит тележка массой $m = 30$ *кг* и длиной $L = 2$ *м*. На одном конце тележки стоит человек массой $M = 60$ *кг*. На какое расстояние передвинется тележка, если человек перейдет на другой ее конец ? Сопротивлением движению пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.3.07. Конькобежец массой $M = 80$ *кг*, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 6$ *кг* со скоростью v = *8 м/с*. На какое расстояние откатится конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0{,}01$. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.3.08. На вагонетку, которая движется со скоростью $v_0$, прыгает человек массой $m = 60$ *кг* со скоростью u = *5 м/с*, направленной под углом $\alpha = 60$ к ходу вагонетки. Определить скорость вагонетки и человека. Масса вагонетки $M = 240$ *кг*. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.3.09. Охотник стреляет с легкой неподвижной лодки. Найти скорость лодки после выстрела, если масса охотника с лодкой $M$ = 80 кг, масса дроби $m = 20$ *г*. Скорость заряда дроби после выстрела $v_0 = 200$ *м/с*. Ствол ружья направлен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Ответ дать в *см/с*. Сопротивлением воды и воздуха пренебречь.

1.3.10. Человек массой $m = 60$ *кг* переходит с одного конца лодки, плавающей в воде, на другой конец. На какое расстояние переместится лодка относительно неподвижной воды, если масса лодки $M = 120$ *кг*, а его длина $L = 3$ *м*? Сопротивление воды не учитывать.

## 1.4. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. МОЩНОСТЬ

### Теоретический минимум

Работа силы $\mathbf{F}$, действующей на частицу, совершенная при перемещении $d\mathbf{r}$ этой частицы, равна скалярному произведению вектора силы на перемещение:

$$\delta A = \left(\mathbf{F}\, d\mathbf{r}\right) = F\cos\alpha\, dS, \tag{1.4.1}$$

где $\alpha$ – угол между силой и перемещением. Работой силы $\mathbf{F}$ при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 называется определенный интеграл:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 F\cdot cos\alpha\cdot dS, \tag{1.4.2}$$

взятый вдоль траектории частицы. Если сила постоянна по величине ($F = \text{const}$) и угол между силой и перемещением при движении частицы остается неизменным ($\alpha = \text{const}$), интегрирование в (38) приводит к простой формуле:

$$A = FS\cos\alpha.$$

Пусть частица движется по траектории, представляющей собой замкнутую кривую, и возвращается в исходную точку. Потенциальными называются силы, работа которых по такому замкнутому контуру С равна нулю:

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{1.4.3}$$

В этом случае имеет смысл понятие потенциальной энергии $U$:

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\quad U = -\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\quad \mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \tag{1.4.4}$$

Действительно, работа таких (1.4.4) сил по замкнутому контуру автоматически получается равной нулю:

$$-\oint_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \oint_c dU = \int_1^1 dU = U_1 - U_1 = 0.$$

Работа потенциальных сил зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит от пути и от формы траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -\int_1^2 dU = U_1 - U_2 = -\Delta U\,, \qquad (1.4.5)$$

работа потенциальной силы равна изменению потенциальной энергии (с обратным знаком).

Приведем три примера потенциальных сил и потенциальных энергий.

1) Сила Гука и потенциальная энергия деформированной пружины:

$$F_x = -kx, \qquad U = -\int F_x\, dx = \frac{kx^2}{2}.$$

2) Сила гравитации и потенциальная энергия гравитационного притяжения:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{\mathbf{r}}, \qquad U = -\int \vec{\mathbf{F}}\, d\vec{\mathbf{r}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

3) Сила тяжести и потенциальная энергия тела (если считать силу тяжести постоянной):

$F = mg$, $U = Fh = mgh$,

где $h$ – высота подъема тела.

Сила трения не является потенциальной. Для нее нельзя указать потенциальную энергию, так как работа силы трения по замкнутому контуру не равна нулю и зависит от пройденного телом пути.

Подставим в определение работы (1.4.2) сумму сил, действующих на тело, как потенциальных, так и непотенциальных. Эта сумма, согласно второму закону Ньютона (1.2.1), равна произведению массы тела на его ускорение:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{\mathbf{F}}\, d\vec{\mathbf{r}} = \int_1^2 m\vec{\mathbf{a}}\, d\vec{\mathbf{r}}.$$

Простейшие преобразования с использованием определений ускорения (1.1.6) и скорости (1.1.2)

$$\vec{\mathbf{a}}\,d\vec{\mathbf{r}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\,d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\mathbf{v}}\,\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}\,d\vec{\mathbf{v}}$$

позволяют взять этот интеграл:

$$A_{12} = \int_1^2 m \mathrm{v}\, d\mathrm{v} = \frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2} = K_2 - K_1. \qquad (1.4.6)$$

Величина:

$$K = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} \qquad (1.4.7)$$

называется кинетической энергией тела. Следовательно, работа любых сил равна изменению кинетической энергии.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью:

$$N = \frac{dA}{dt}. \qquad (1.4.8)$$

Используя определение работы $\delta A = \left(\vec{\mathbf{F}}\,d\vec{\mathbf{r}}\right) = \left(\vec{\mathbf{F}}\vec{\mathbf{v}}\right)dt$, получаем для мощности выражение:

$$N = \left(\vec{\mathbf{F}}\vec{\mathbf{v}}\right),$$

согласно которому мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы.

Единица работы совпадает с единицей энергии (см. (1.4.5), (1.4.6)) и в системе СИ называется «Джоуль» (Дж):

$[A] = [F][r] =$ Н·м $= [E] = [U] = [K] = [m][\mathrm{v}]^2 =$ *кг·м*$^2$ */с*$^2$ *= Дж*.

Единица мощности в системе СИ называется “Ватт” (*Вт*):

$[N] =$ *Дж/с = Вт*.

## <u>Примеры решения задач</u>

**Задача 1**.

Пружина жесткостью $k = 500$ *Н/м* сжата силой $F = 100$ *Н*. Определить работу внешней силы А, дополнительно сжимающей пружину еще на $\Delta x = 2$ *см*.

<u>*Решение:*</u>

Работа, совершаемая внешней силой при сжатии пружины определяется формулой (см. (1.4.5)):

$$A = -\int_0^x F \cdot dx, \tag{1.4.9}$$

где x – сжатие пружины. Сила F пропорциональна сжатию пружины, т.е.

$$F = - kx. \tag{1.4.10}$$

Подставляя (1.4.10) в (1.4.9) мы можем найти работу, совершенную внешней силой, но в нашем случае пружина была дополнительно сжата еще на $\Delta x$. В этом случае работа дополнительной внешней силы будет определятся формулой:

$$A = -\int_x^{x+\Delta x} F \cdot dx, \tag{1.4.11}$$

Подставляя (1.4.10) в (1.4.11) получим:

$$A = -\int_x^{x+\Delta x} kx \cdot dx = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_x^{x+\Delta x} = \frac{k}{2}(2x + \Delta x)\Delta x, \tag{1.4.12}$$

где x находим из (1.4.10): $x = \dfrac{F}{k}$. (1.4.13)

Подставляя (1.4.13) в (1.4.12) получим:

$$A = \frac{k}{2}(2\frac{F}{k} + \Delta x)\Delta x = 2.1 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 2.1$ *Дж*.

**<u>Задачи</u>**

1.4.01. Материальная точка массой m = 2 кг движется под действием некоторой силы, направленной вдоль оси 0$x$ согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = –2$ *м/с*, $C = 1$ *м/с*$^2$, $D = –0,2$ *м/с*$^3$. Найти мощность $N$, развиваемую силой в момент времени $t_1 = 2$ *с* и $t_2 = 5$ *с*.

1.4.02. Найти работу $A$ подъема груза по наклонной плоскости длиной $L = 2$ *м*, если масса $m$ груза равна *100 кг*, угол наклона $\varphi = 30°$, коэффициент трения $\mu = 0,1$ и груз движется с ускорением $a = 1$ *м/с*$^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.4.03. Вычислить работу $A$, совершаемую на пути $S = 12$ *м* равномерно возрастающей силой, если в начале пути сила $F_1 = 10$ *Н*, в конце пути $F_2 = 46$ *Н*.

1.4.04. Тело массой $m = 1$ *кг*, брошенное под углом к горизонту на высоте $h = 2$ *м* со скоростью v = *6 м/с*, упало на землю со скоростью u = *7 м/с*. Определить работу $A$ сил сопротивления воздуха. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.4.05. Какую минимальную механическую работу $A$ необходимо совершить, чтобы сложить из кирпича цилиндрическую колонну высотой $H = 2$ *м* и массой $M = 2$ *т*? Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.4.06. Какую минимальную работу $A$ надо совершить, чтобы лежащий на земле однородный стержень длиной $L = 2$ *м* и массой $m = 10$ *кг* поставить вертикально? Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

1.4.07. Какую минимальную работу $A$ необходимо совершить, чтобы откачать воду из колодца глубиной $H = 10$ *м* и площадью поперечного сечения $S = 1$ *м*$^2$, заполненного до верха? Предполагается, что откачанная вода разливается тонким слоем по поверхности земли. Принять плотность воды $\rho$ □= *1000 кг / м*$^3$, а ускорение свободного падения $g = 10$ *м / с*$^2$.

1.4.08. Грузовики, мощность двигателей которых $N_1 = 400\ кВт$ и $N_2 = 500\ кВт$, движутся со скоростями $v_1 = 20\ м/с$ и $v_2 = 25\ м/с$. Какова будет максимальная скорость грузовиков, если их соединить нерастяжимым тросом?

1.4.09. Боек свайного молота массой $m_1 = 500\ кг$ падает с некоторой высоты на сваю массой $m_2 = 100\ кг$. Найти КПД $\eta$ удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.4.10. Молотком, масса которого $m_1 = 1\ кг$, забивают в стену гвоздь массой $m_2 = 75\ г$. Определить КПД $\eta$ удара молотка при данных условиях. Сопротивлением воздуха пренебречь.

## 1.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. СТОЛКНОВЕНИЯ ТЕЛ

### Теоретический минимум

Если действуют только потенциальные силы (1.4.4), то полная энергия тела, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, сохраняется:

$$\int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \quad \Leftrightarrow \quad E = K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = \mathrm{const}. \qquad (1.5.1)$$

Полная механическая энергия системы тел, на которые действуют только потенциальные силы, тоже остается постоянной. Такие системы называются консервативными.

Задача о столкновении тел является типичным примером использования законов сохранения импульса и энергии. Различают два предельных вида столкновений: абсолютно упругие и абсолютно неупругие.

После абсолютно неупругого столкновения тела движутся вместе. В результате изменения внутреннего состояния тел, которое сопровождается их нагреванием, механическая энергия системы не сохраняется, а сохраняется только импульс. Для двух тел, образующих замкнутую систему:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{u},$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – скорости тел до удара, $\mathbf{u}$ – их общая скорость после удара, которая находится сразу:

$$\mathbf{u} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Неудивительно, что эта скорость оказалась равной скорости центра масс (1.3.3) до удара:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_c\ ,$$

действительно, согласно закону сохранения импульса (1.3.6), скорость центра масс не меняется в результате удара.

Абсолютно упругим называется столкновение, при котором сохраняется и импульс, и механическая энергия. Для замкнутой системы двух тел:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = m_1\vec{\mathbf{u}}_1 + m_2\vec{\mathbf{u}}_2,$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

где $\vec{\mathbf{v}}_1$ и $\vec{\mathbf{v}}_2$ – скорости тел до удара, $\vec{\mathbf{u}}_1$ и $\vec{\mathbf{u}}_2$ – скорости этих тел после удара.

Результат упругого столкновения зависит от того, как налетают тела друг на друга. Наиболее простым является центральный удар, при котором тела до удара движутся вдоль прямой, соединяющей их центры.

## Примеры решения задач

**Задача 1.**

Два шара подвешены на нитях одинаковой длины *L = 90 см* так, что они соприкасаются. Массы шаров $m_1 = 100$ *г* и $m_2 = 200$ *г*. Меньший шар отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после центрального абсолютно упругого соударения?

*Решение:*

Эта задача решается с помощью законов сохранения энергии и импульса. На движущийся вниз первый шар действует потенциальная сила тяжести, и его энергия, равная сумме кинетической и потенциальной $E = K + U$, сохраняется. Сила натяжения нити перпендикулярна к скорости шара и работы не совершает; трение не учитываем. Вверху равна нулю кинетическая энергия. Внизу, на подлете ко второму шару, равна нулю его потенциальная энергия. Таким образом, потенциальная энергия переходит в кинетическую:

$$m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

где $h = L$ – длина нити, $v_1$ – скорость первого шара непосредственно перед ударом:

$$v_1^2 = 2gL.$$

При абсолютно упругом ударе первого шара о второй сохраняется и импульс системы этих двух тел, и энергия:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}, \end{cases}$$

где $u_1$ и $u_2$ – горизонтальные проекции скоростей шаров сразу после удара. Найдем эти скорости. Для этого перепишем систему законов сохранения в виде:

$$\begin{cases} m_1 \left( v_1 - u_1 \right) = m_2 u_2, \\ m_1 \left( v_1^2 - u_1^2 \right) = m_2 u_2^2. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение на первое, получим

$v_1 + u_1 = u_2$.

Подставляя это равенство в закон сохранения импульса, получаем скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \qquad u_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_1.$$

При $m_1 = m_2$ первый шар останавливается ($u_1 = 0$), а скорость второго после удара равна скорости первого до удара ($u_2 = v_1$). Так как в нашей задаче $m_1 < m_2$, то $u_1 < 0$, то есть первый (меньший) шар отскакивает назад.

Высоту, на которую поднимется шар после удара, найдем опять из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} = m_1 g h_1, \qquad \frac{m_2 u_2^2}{2} = m_2 g h_2,$$

где $h_1$ и $h_2$ – высоты подъемов первого и второго шара. Подставляя сюда найденные выражения для $u_1$, $u_2$ и $v_1$, получаем результат:

$$h_1 = \frac{u_1^2}{2g} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot L = 0.1\ м$$

$$h_1 = \frac{u_2^2}{2g} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) \cdot L = 0.4\ м$$

Ответ: $h_1 = 0{,}1\ м$; $h_1 = 0{,}4\ м$.

**<u>Задачи</u>**

1.5.01. Два шарика массами $m_1 = 300\ г$ и $m_2 = 600\ г$, покоящиеся на гладкой горизонтальной плоскости, связаны пружиной длиной $L = 50\ см$ и жесткостью $k = 180\ Н/м$. Шарику массой $m_1$ сообщили скорость $v_0 = 9\ м/с$ в направлении от шарика массой $m_2$ вдоль линии соединяющей их центры. На какое максимальное расстояние удалятся шарики друг от друга?

1.5.02. Небольшое тело скользит с вершины полусферы радиуса $R = 30\ см$. На какой высоте $h$ от основания полусферы тело оторвется от ее поверхности?

1.5.03. Вокруг горизонтальной оси может свободно (без трения) вращаться невесомый рычаг, плечи которого $L_1 = 0{,}2\ м$ и $L_2 = 0{,}4\ м$. На концах рычага укреплены грузы массами, соответственно, $m_1 = 100\ г$ и $m_2 = 100\ г$. Предоставленный самому себе, рычаг переходит из горизонтального состояния в вертикальное. Какую скорость будет иметь в нижней точке груз массой $m_2$?

1.5.04. Камень брошен вверх под углом $\varphi = 60°$ к плоскости горизонта. Кинетическая энергия $K_0$ камня в начальный момент времени равна $20\ Дж$. Определить кинетическую $K$ и потенциальную $U$ энергии камня в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.5.05. Шар массы $M = 0{,}4\ кг$, движущийся со скоростью $v = 10\ м/с$, налетает на неподвижный шар массой $m = 0{,}1\ кг$. Определить абсолютное значение скорости $u$ шара массой $m$ после удара. Считать удар абсолютно упругим и центральным.

1.5.06. Шар массой $m = 1{,}8$ *кг* сталкивается с покоящимся шаром большей массы $M$. В результате прямого упругого удара шар потерял 0,36 своей кинетической энергии $K_1$. Определить массу $M$ большего шара.

1.5.07. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров шар массой $M$ покоится. В результате прямого удара шар массой m потерял 3/4 своей кинетической энергии $K_1$. Определить отношение $k = M / m$ масс шаров.

1.5.08. Определить максимальную часть $Q$ кинетической энергии $K_1$, которую может передать частица массой $m_1 = 2{\cdot}10^{-22}$ *г*, сталкиваясь упруго с частицей массой $m_2 = 6{\cdot}10^{-25}$ *г*, которая до столкновения покоилась.

1.5.09. На покоящийся шар налетает со скоростью $v_1 = 2$ *м/с* другой шар одинаковой с ним массы. В результате столкновения этот шар изменил направление движения на угол $\alpha = 30°$. Определить: 1) скорости $u_1$ и $u_2$ шаров после удара; 2) угол $\beta$ между вектором скорости второго шара и первоначальным направлением движения первого шара. Удар считать упругим.

1.5.10. Частица массой $m_1 = 10^{-24}$ *г* имеет кинетическую энергию $K_1 = 9$ *кДж*. В результате упругого столкновения с покоящейся частицей массой $m_2 = 4{\cdot}10^{-24}$ *г* она сообщает ей кинетическую энергию $K_2 = 5$ *кДж*. Определить угол $\alpha$ на который отклонится частица от своего первоначального направления.

# ЧАСТЬ II

## 2.1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

***Теоретический минимум***

Момент инерции материальной точки равен:

$$I = mR^2, \tag{2.1.1}$$

где $R$ – расстояние от оси вращения до материальной точки, $m$ – ее масса.

Момент инерции системы материальных точек:

$$I = \sum_i m_i R_i^2 . \tag{2.1.2}$$

Для вычисления момента инерции протяженного тела суммирование в (2.1.2) следует заменить интегрированием:

$$I = \int R^2 dm. \tag{2.1.3}$$

Интеграл (2.1.3) – это и есть по своему смыслу сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых в (2.1.2), $R$ – расстояние от оси вращения до массы $dm$. Например, все точки тонкого кольца (обруча, трубы) находятся на одинаковом расстоянии $R$ от оси, проходящей через центр этого кольца перпендикулярно его плоскости. Поэтому момент инерции кольца (обруча, трубы) относительно такой оси равен:

$$I_{\text{c}} = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2 . \tag{2.1.4}$$

Выпишем результат интегрирования (2.1.3) для некоторых других однородных тел. Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс:

1) стержня длиной $l$, ось перпендикулярна стержню:

$$I_{\text{c}} = \frac{1}{12} ml^2 ;$$

(2.1.5)

2) диска (цилиндра) радиусом $R$, ось перпендикулярна плоскости основания:

$$I_{\text{c}} = \frac{1}{2} mR^2 ; \tag{2.1.6}$$

3) шара радиусом $R$:

$$I_c = \frac{2}{5}mR^2. \qquad (2.1.7)$$

Момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс, можно вычислить при помощи теоремы Штейнера:

$$I = I_0 + ma^2. \qquad (2.1.8)$$

Здесь $I_0$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, $I$ – момент инерции относительно другой оси, параллельной первой, $a$ – расстояние между этими осями, $m$ – масса тела.

Момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции тел, составляющих эту систему: $I = \sum_i I_i$. (2.1.9)

Здесь индекс $i$ нумерует тела системы.

В системе СИ: $[I] = [m][r]^2$ = кг·м$^2$.

## Примеры решения задач

**Задача 1.**

Найти момент инерции однородного стержня массы $m$ и длины $L$ относительно оси: 1) перпендикулярной стержню и проходящей через его середину; 2) перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов.

*Решение:*

1) Момент инерции макроскопического тела складывается из моментов инерции материальных точек (2.1.9). В нашем случае момент инерции однородного стержня относительно оси $OO$ можно рассчитать, зная момент инерции $dI_0$ элементарной массы $dm$, находящейся на расстоянии $r$ от оси вращения $OO$ (см. Рис. 2.1.1).

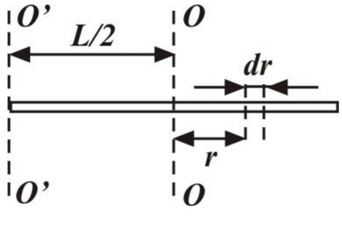


Рис. 2.1.1.

Здесь $dm$ – элементарная масса, содержащаяся в слое толщиной $dr$, поперечным сечением $S$ и плотностью $\rho = m/S{\cdot}L$, т.е. $dI = r^2\rho Sdr$. Интегрируя это выражение от $0$ до $L/2$, найдем момент инерции половины стержня, т.е.

$$I_0/2 = \int dI_0 = \int_0^{L/2} r^2\rho Sdr = \rho SL^3/24 \qquad (2.1.10)$$

Подставляя выражение для плотности $\rho = m/S{\cdot}L$ в (2.1.10), получаем искомую формулу для момента инерции однородного стержня относительно оси $OO$:

$$I_0 = mL^2/12. \qquad (2.1.11)$$

2) Момент инерции $I$ того же стержня относительно оси $O'O'$, проходящей через конец стержня, можно найти с помощью теоремы Штейнера $I = I_0 + ma^2$ (2.1.8).

В нашем случае $I_0 = mL^2/12$ - момент инерции относительно оси $OO$, проходящей через центр инерции, а $a = L/2$ – расстояние между осями. Следовательно,

$$I = mL^2/12 + mL^2/4 = mL^2/3. \qquad (2.1.12)$$

Ответ: 1) $I_0 = mL^2/12$; 2) $I = mL^2/3$.

## Задачи

2.1.01. Определить момент инерции однородного диска (радиуса $R = 20$ *см* и массы $m = 1$ *кг*) относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр.

2.1.02. Определить момент инерции однородного диска (радиуса $R = 20$ *см* и массы $m = 1$ *кг*) относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через середину одного из радиусов диска.

2.1.03. Определить момент инерции тонкого однородного кольца (радиуса $R = 20$ *см* и массы $m = 0{,}1$ *кг*) относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр.

2.1.04. Найти момент инерции однородного стержня (массы $m = 0{,}1$ *кг* и длины $L = 30$ *см*) относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.

2.1.05. Найти момент инерции однородного стержня (массы $m = 0{,}1$ *кг* и длины $L = 30$ *см*) относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов.

2.1.06. Найти момент инерции однородного стержня (массы $m = 0{,}1$ *кг* и длины $L = 30$ *см*) относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку на его поверхности отстоящую от конца стержня на расстоянии $a = L / 3$.

2.1.07. Найти момент инерции однородного стержня (массы $m = 0{,}1$ *кг* и длины $L = 30$ *см*) относительно оси, параллельной стержню и отстоящей от него на расстоянии $a = 20$ *см*.

2.1.08. На концах тонкого однородного стержня (длины $L$ и массы $3m$) прикреплены шарики, массы которых $m$ и $2m$ соответственно. Определить момент инерции такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через шарик массы $m$.

2.1.09. На концах тонкого однородного стержня (длины $L$ и массы $3m$) прикреплены шарики, массы которых $m$ и $2m$ соответственно. Определить момент инерции такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через шарик массы $2m$.

2.1.10. На концах тонкого однородного стержня (длины $L$ и массы $3m$) прикреплены шарики, массы которых $m$ и $2m$ соответственно. Определить момент инерции такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.

## 2.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### Теоретический минимум

Момент силы – это вектор, равный векторному произведению радиус-вектора $\vec{\mathbf{r}}$ на вектор силы $\vec{\mathbf{F}}$:

$$\vec{\mathbf{M}} = \left[\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right]. \qquad (2.2.1)$$

Здесь радиус-вектор $\vec{\mathbf{r}}$ проведен из точки, относительно которой определяется момент силы, в точку приложения силы (см. Рис. 2.2.1). Таким образом, вектор момента силы определяется относительно точки (а не оси). Величина (модуль) этого вектора:

$$M = rF\sin\alpha = lF, \qquad (2.2.2)$$

где $\alpha$ – угол между векторами $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{F}}$, $l = r\sin\alpha$ – плечо силы, то есть длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, вдоль которой действует сила (Рис. 2.2.1). Моментом силы относительно оси называется проекция вектора момента силы на эту ось.

Моментом импульса частицы называется вектор, равный векторному произведению радиус-вектора $\vec{\mathbf{r}}$, проведенного из точки, относительно которой определяется момент импульса, в точку, где расположена частица, на вектор импульса $\vec{\mathbf{p}}$ (Рис. 2.2.2):

$$\vec{\mathbf{L}} = \left[\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}\right]. \qquad (2.2.3)$$

Модуль вектора:

$$L = rp\sin\alpha = lp, \qquad (2.2.4)$$

где $\alpha$ – угол между векторами $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{p}}$, $l = r\sin\alpha$ – плечо импульса, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, вдоль которой направлен импульс тела. Моментом импульса относительно оси называется проекция вектора момента импульса на эту ось.

Например, момент импульса материальной точки, движущейся по окружности радиуса $R$ относительно центра этой окружности, равен по величине:

$$L = Rm\mathrm{v} = mR^2\omega = I\omega. \tag{2.2.5}$$

Здесь использована связь $\mathrm{v} = \omega R$. Величина $I = mR^2$ – момент инерции материальной точки. Вектор момента импульса в данном случае направлен перпендикулярно плоскости движения тела вдоль угловой скорости $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ (Рис. 2.2.3).

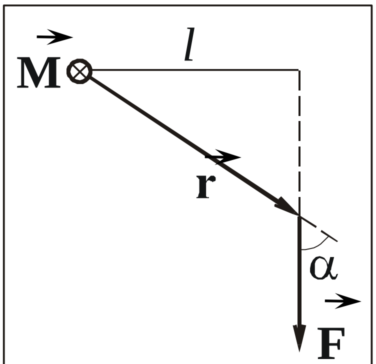

Рис. 2.2.1

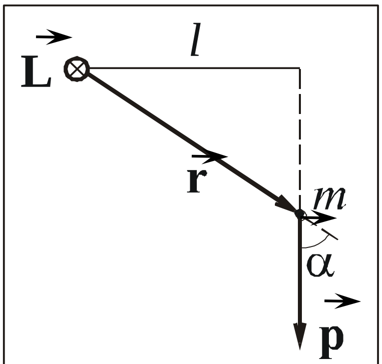

Рис. 2.2.2

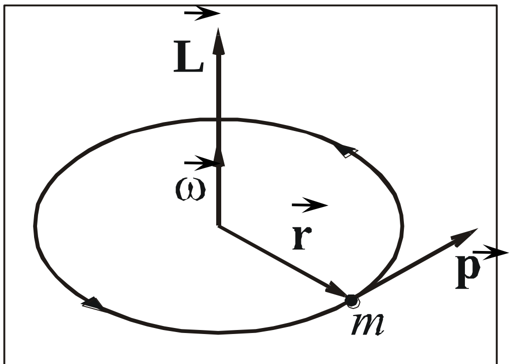

Рис. 2.2.3

Производная от момента импульса равна моменту силы:

$$\dot{\mathbf{L}} = \left[\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}\right] = \left[\mathbf{v}\times\mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r}\times\mathbf{F}\right] = \left[\mathbf{r}\times\mathbf{F}\right] = \mathbf{M}. \tag{2.2.6}$$

Здесь использованы определение скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ (1.1.2), второй закон Ньютона $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ (1.2.4) , а также то, что $[\mathbf{v}\times\mathbf{p}] = [\mathbf{v}\times \mathrm{m}\mathbf{v}] = 0$. Полученное соотношение:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \tag{2.2.7}$$

является вторым по счету (первое $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ – второй закон Ньютона (1.2.4)) уравнением движения. Его иногда называют уравнением вращательного движения в отличие от второго закона Ньютона (1.2.4), который в этом случае называют уравнением поступательного движения.

Если ось вращения закреплена, момент импульса относительно этой оси пропорционален величине угловой скорости. Совместим координатную ось z с осью вращения и запишем это утверждение в виде:

$$L_z = I\omega, \tag{2.2.8}$$

причем $\omega = \omega_z$ (ось закреплена), а $L = L_z$ (момент импульса в общем случае не параллелен угловой скорости (Рис. 2.2.4)).

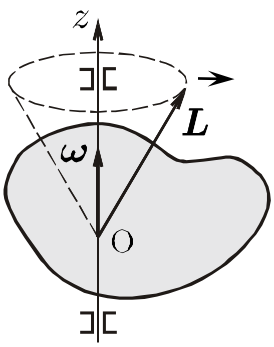

Рис. 2.2.4

Используя уравнение вращательного движения (2.2.8), для твердого тела можно эквивалентно определить момент инерции как коэффициент пропорциональности между моментом силы относительно закрепленной оси $M_z$ и угловым ускорением $\varepsilon$:

$$M_z = I\varepsilon\,, \tag{2.2.9}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \dot{\omega}$ (ось закреплена).

Если же ось вращения не закреплена, связь между моментом импульса и угловой скоростью усложняется, и приходится обращаться к понятию тензора инерции $I_{ik}$,

$$L_i = \sum_k I_{ik}\omega_k\,, \tag{2.2.10}$$

где $L_i = \left(L_x\,,\, L_y\,,\, L_z\right)$ – любая компонента момента импульса. В дальнейшем будем считать ось закрепленной.

Единицы импульса $\vec{\mathbf{p}}$, момента импульса $\vec{\mathbf{L}}$, момента силы $\vec{\mathbf{M}}$, и момента инерции $I$ своих названий не имеют. В системе СИ:

$[p] = [m][\mathrm{v}] = [F][t] = Н\cdot с$,

$[L] = [p][r] = [m][\mathrm{v}][r] = кг\cdot м^2/с$,

$[M] = [F][r] = Н\cdot м$,

$[\mathrm{I}] = [m][r]^2 = кг\cdot м^2$.

Обратите внимание, что размерность момента силы $Н\cdot м$ формально совпадает с размерностью работы *Дж* = *Н·м*. Это действительно формальное совпадение размерностей различных физических величин. Измерять моменты сил в Джоулях не принято.

## Примеры решения задач

**Задача 1.**

На однородный цилиндр намотана гибкая нерастяжимая лента длиной $l = 1$ *м*, масса которой много меньше массы цилиндра $m$. Свободный конец ленты закрепили, а цилиндр отпустили. Найти время разматывания ленты $t$.

*Решение:*

Решим эту задачу двумя способами.

*Способ 1*

Цилиндр совершает вращательное движение относительно оси, проходящей через его центр масс (точка С на Рис. 2.2.5) и поступательное движение цилиндра со скоростью точки С.

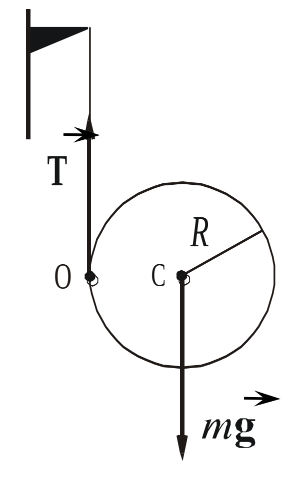


Рис. 2.2.5

Уравнением поступательного движения является второй закон Ньютона. Запишем его в проекции на ось, направленную вертикально вниз:

$$ma_c = mg - T. \qquad (2.2.11)$$

Уравнение вращательного движения (2.2.9):

$$M_c = I_c\varepsilon$$

Здесь $\varepsilon$ угловое ускорение цилиндра, $I_c = mR^2/2$ – его момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, $M_c$ – величина момента силы натяжения ленты $\vec{T}$ относительно точки С:

$$M_c = TR, \quad T = \frac{M_c}{R} = I_c \frac{\varepsilon}{R}. \qquad (2.2.12)$$

Момент силы тяжести $m\vec{g}$ относительно этой точки равен нулю, т.к. равно нулю плечо этой силы.

Подставляя $T$ из (2.2.12) в (2.2.11), получаем:

$$ma_c = mg - I_c \frac{\varepsilon}{R}. \qquad (2.2.14)$$

Ускорение $a_c$ точки С равно по величине тангенциальному ускорению поверхности цилиндра относительно точки С, которое в свою очередь равно $\varepsilon R$ (1.1.19): $\varepsilon = a_c / R$.

Подставляя $\varepsilon$ в (2.2.14):

$$m\left(1 + \frac{I_c}{mR^2}\right)a_c = mg,$$

находим ускорение оси цилиндра:

$$a_c = g\left(1 + \frac{I_c}{mR^2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}g$$

и время $t$ прохождения пути, равного длине ленты $l = \dfrac{a_c t^2}{2}$ (см. 1.1.15):

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_c}} = \sqrt{3\frac{l}{g}} \approx 0.55\ c.$$

<u>Способ 2.</u>

За время $t$ лента разматывается на длину: $l = \dfrac{a_0 t^2}{2}$, где $a_0$ – ускорение перемещения точки 0 (ускорение разматывания), $a_0 = a_c$.

В уравнение вращательного движения цилиндра относительно точки О:

$$I_0\varepsilon = M_0, \qquad (2.2.15)$$

входит момент силы тяжести:

$M_0 = mgR$,

а плечо силы натяжения ленты равно нулю. Момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через точку 0, по теореме Штейнера (2.1.8):

$I_0 = I_c + mR^2$.

Ускорение разматывания $a_0$ по своему смыслу равно тангенциальному ускорению поверхности цилиндра, которое в свою очередь равно $\varepsilon R$:

$\varepsilon = a_0 / R$.

Подставляя полученные выражения для $M_0$, $I_0$ и $\varepsilon$ в уравнение (2.2.15) получаем:

$$mgR = \left(I_c + mR^2\right)\frac{a_0}{R},$$

то есть

$$a_0 = g\left(1 + \frac{I_c}{mR^2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}g$$

и

$$t = \sqrt{2l/a_0} = \sqrt{3l/g} » 0.55\ c.$$

Обратите внимание на то, что в этом способе движение цилиндра описывается только уравнением вращательного движения относительно точки О (2.2.15); уравнение поступательного движения (2.2.11) не используется. Поверхность цилиндра покоится относительно ленты, которая на него намотана. В частности, в точке 0 линия касания цилиндра покоится относительно ленты, цилиндр совершает только вращательное движение вокруг этой линии, называемой мгновенной осью вращения, а сама эта линия опускается вниз с ускорением $a_0 = a_c$.

**Задача 2.**

Через блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 5.0$ *кг* и $m_2 = 6.0$ *кг*. Масса блока $m_3 = 2.0$ *кг*, радиус блока $R = 10$ *см*, момент сил трения в блоке $M_{тр} = 0.20$ *Н*. Определить ускорения грузов и натяжение нити.

Решение:

Система состоит из трех тел (см. Рис. 2.2.6), два из которых (грузы) совершают поступательное движение, а блок – вращательное:

$$m_1\vec{\mathbf{a}}_1 = \vec{\mathbf{T}}_1 + m_1\vec{\mathbf{g}},$$
$$m_2\vec{\mathbf{a}}_2 = \vec{\mathbf{T}}_2 + m_2\vec{\mathbf{g}},$$
$$I\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \vec{\mathbf{M}}_1 + \vec{\mathbf{M}}_2 + \vec{\mathbf{M}}_{\text{тр}},$$

где $I$ – момент инерции блока, $\varepsilon$ – его угловое ускорение, $M_1 = T_1'R$ и $M_2 = T_2'R$ – моменты сил натяжения нити. Считая блок однородным цилиндром, используем (2.1.6):

$$I = \frac{1}{2}m_3R^2.$$

Легкость нити даёт основание считать её натяжение одинаковым по одну сторону блока: $T_1 = T_2',\quad T_2 = T_2'.$

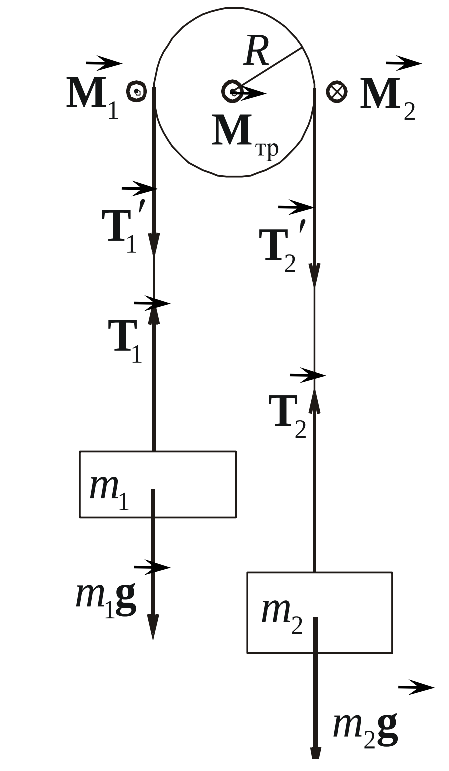

Рис. 2.2.6

Однако $T_1' \neq T_2'$ вследствие массивности блока и наличия момента сил трения.

Нерастяжимость нити означает равенство по величине ускорений грузов:

$$\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2, \quad a_1 = a_2 = a.$$

Угловое ускорение блока $\varepsilon$ связано с тангенциальным ускорением поверхности блока $a_\tau$ соотношением (1.1.19): $a_\tau = \varepsilon R$. Тангенциальное ускорение блока $a_\tau$ равно по величине ускорению грузов, $a_\tau = a$. Поэтому

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Моменты сил $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ направлены вдоль оси вращения в противоположные стороны. Так как $m_2 > m_1$, момент сил трения $\mathbf{M}_{\text{тр}}$ направлен против $\mathbf{M}_2$. Проецируя уравнение вращательного движения блока на ось его вращения и разделив на $R$, получаем:

$$\frac{1}{2} m_3 a = T_2 - T_1 - \frac{M_{\text{тр}}}{R}.$$

Проецируем уравнения поступательного движения грузов на вертикальную ось:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g,$$
$$m_2 a = m_2 g - T_2.$$

Решая полученную систему трёх уравнений, находим результат:

$$a = \frac{m_2 - m_1 - M_{\text{тр}}/gR}{m_1 + m_2 + m_3/2} g \approx 0.65 \text{ м/с}^2,$$

$$T_1 = \frac{m_1 \left(2m_2 + m_3/2 - M_{\text{тр}}/gR\right)}{m_1 + m_2 + m_3/2} g \approx 52 \text{ Н},$$

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} m_3 a + \frac{M_{\text{тр}}}{R} \approx 55 \text{ Н}.$$

**Задачи**

2.2.01. По наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный диск. Найти линейное ускорение центра диска. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

2.2.02. По наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный шар. Найти линейное ускорение центра шара. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

2.2.03. На горизонтальную ось насажен блок радиуса $R = 8$ *см*. На блок намотан шнур, к которому подвесили гирю массы $m = 1$ кг. Опускаясь равноускоренно, гиря прошла путь $S = 1{,}6$ *м* за время $t = 2$ *с*. Определить момент инерции блока $J$. Проскальзывания нити по блоку нет. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ *м/с*$^2$.

2.2.04. Вал (массы $M = 100$ *кг* и радиуса $R = 5$ *см*) вращался с частотой $n = 8$ *об/с*. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ *Н*, под действием которой вал остановился через $t = 10$ *с*. Определить коэффициент трения $\mu$.

2.2.05. Шар (массы $m = 1$ *кг* и радиуса $R = 20$ см) вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2$, где $C = 1$ *рад/с*$^3$. Определить момент сил $M$ в момент времени $t = 2$ *с*.

2.2.06. Тонкий однородный стержень (длины $L = 50$ *см* и массы $m = 400$ *г*) вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ *рад/с*$^2$ около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент $M$.

2.2.07. Стержень (массы $m = 6$ *кг* и длины $L = 40$ *см*) вращается вокруг оси, проходящей через его середину перпендикулярно боковой поверхности стержня. Угол поворота стержня изменяется во времени по закону $\varphi(t) = 3t^3 - t^2 + 4t + 6$. Определить момент сил $M$ в момент времени $t = 3$ *с*.

2.2.08. Диск (массы $m = 3$ *кг* и радиуса $R = 0{,}5$ *м*) вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Угловая скорость диска меняется во времени по закону $\omega(t) = 20 - 8t$. Найти касательную силу, приложенную к ободу диска. Трением в оси вращения пренебречь.

2.2.09. Два тела массами $m_1 = 0{,}25$ *кг* и $m_2 = 0{,}15$ *кг* связаны тонкой нитью, переброшенной через блок. Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой $m_1$. Блок представляет собой сплошной диск массы $M = 0{,}1$ *кг*. Проскальзывание нити по блоку отсутствует. Найти коэффициент трения скольжения $\mu$ первого тела по столу.

2.2.10. Сплошной однородный диск (массы $m = 10$ *кг* и радиуса $R = 20$ *см*) вращается, делая $n = 10$ *об/с*. Через $t = 4$ *с* после начала торможения диск остановился. Найти тормозящий момент сил $M$.

## 2.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. ЭНЕРГИЯ, РАБОТА И МОЩНОСТЬ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ.

### Теоретический минимум

Из уравнения движения (2.2.7) следует, что момент импульса частицы сохраняется, если момент действующих на неё сил равен нулю:

$$\vec{\mathbf{M}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{L}} = \overline{\mathrm{const}}.$$

Момент импульса системы частиц $\vec{\mathbf{L}}$ равен векторной сумме моментов импульсов частиц $\vec{\mathbf{L}}_i$, составляющих эту систему:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \sum_i \left[\vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i\right].$$

Суммируя уравнения движения (2.2.7) $\dot{\vec{\mathbf{L}}}_i = \vec{\mathbf{M}}_i$ каждой из частиц, получим:

$$\dot{\vec{\mathbf{L}}} = \sum_i \dot{\vec{\mathbf{L}}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{M}}_i .$$

Моменты сил в правой части можно разделить на моменты внутренних сил и моменты внешних сил:

$$\sum \vec{\mathbf{M}} = \sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внут}} + \sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внеш}} .$$

Из третьего закона Ньютона следует, что сумма моментов внутренних сил равна нулю, $\sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внут}} = 0$. Поэтому в уравнении движения системы частиц остаются только моменты внешних сил:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внеш}} . \qquad (2.3.1)$$

Момент импульса изолированных систем (на которые не действуют внешние силы) сохраняется:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{внеш}} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{\mathbf{M}}_{\text{внеш}} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{\mathbf{L}} = \overline{\mathrm{const}} .$$

Для сохранения момента импульса достаточно, чтобы сумма моментов внешних сил равнялась нулю:

$$\sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{внеш}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{L}} = \overline{\mathrm{const}} . \qquad (2.3.2)$$

Для сохранения момента импульса относительно оси надо, чтобы проекция суммарного момента внешних сил на эту ось равнялась нулю:

$$\frac{dL_z}{dt} = \left(\sum M_{внеш}\right)_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_z = \text{const}. \qquad (2.3.3)$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси:

$$K_{вращ} = \sum_i \frac{m_i \text{v}_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i R_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (2.3.4)$$

Здесь использованы связь $\text{v}_i = \omega R_i$ и соотношение (2.1.2), если ось вращения передвигается, оставаясь параллельной самой себе (плоское движение), то полная кинетическая энергия тела равна сумме энергии поступательного движения и энергии вращательного движения:

$$K = \frac{m\text{v}_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \qquad (2.3.5)$$

где $\text{v}_c$ – скорость центра масс тела, $I_c$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

## <u>Примеры решения задач</u>

**Задача 1.**

Кинетическая энергия вращающегося маховика $K$ равна *1кДж*. Под действием постоянного тормозящего момента сил маховик начал замедлять свое вращение и, сделав $N = 80$ *оборотов*, остановился. Определить момент сил торможения $M$.

*Решение:*

Обладая известной из условия задачи кинетической энергией вращения $K$=1кДж, маховик имел угловую скорость $\omega_0$, определяемую соотношением (2.3.4):

$$K = \frac{I\omega_0^2}{2},$$

где $I$ – момент инерции маховика. Согласно уравнению вращательного движения (2.2.9):

$M = I\varepsilon$,

постоянный по условию тормозящий момент сил $M = \text{const}$ приводит к замедлению вращения с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = \text{const}$. В этом случае формула (1.1.21) для уменьшающейся угловой скорости:

$\omega = \omega_0 - \varepsilon t$

до остановки $\omega = 0$ дает время движения, $t = \omega_0/\varepsilon$, которое подставим в зависимость угла поворота от времени (1.1.22),

$$\Delta\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}$$

(сравните это с (1.1.22)). Подставляя сюда найденное выше $\omega_0^2 = 2K/I$, получаем:

$K = M\Delta\varphi$.

Наконец, угол поворота $\Delta\varphi$ связан с числом сделанных оборотов известным соотношением (1.1.23) $\Delta\varphi = 2\pi N$, поэтому

$$K = 2pMN, \quad M = \frac{K}{2pN} \text{ » } 2\ H\text{Ч}м.$$

**Задача 2.**

Однородный тонкий стержень массой $M = 150$ *г* может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Летящий горизонтально со скоростью $v = 10$ *м/с*, перпендикулярной стержню, пластилиновый шарик массой $m = 10$ *г* попадает в конец неподвижного стержня и прилипает к нему. Найти линейную скорость $u$ прилипшего шарика.

*Решение:*

Вертикальная проекция вектора суммарного момента внешних сил (реакции опоры и тяжести), действующих на систему тел «шарик-стержень», равна нулю, поэтому (см. (2.3.3)) вертикальная проекция вектора момента импульса системы сохраняется. Сам вектор момента импульса определим относительно точки, совпадающей с центром стержня, чтобы (для упрощения описания) этот вектор тоже был направлен вертикально. Момент импульса шарика до удара (см. (2.2.4)):

$$L_ш = \frac{l}{2} m\text{v},$$

где $m$ – масса шарика, $l$ – длина стержня, $l/2$ – плечо импульса шарика, v – его скорость до удара. Стержень до удара покоился, поэтому его момент импульса был равен нулю, и момент импульса системы «шарик-стержень» до удара $L_1$ равен $L_ш$:

$$L_1 = \frac{l}{2} m\text{v}.$$

В результате удара стержень с прилипшим шариком будет вращаться. Момент импульса системы после удара (см. (2.2.8)):

$$L_2 = I\omega,$$

$\omega$ – угловая скорость вращения стержня с шариком. Момент инерции системы $I$ складывается (см. (2.1.9)) из момента инерции стержня (2.1.5) и момента инерции шарика, который будем считать материальной точкой (2.1.1):

$$I = \frac{1}{12} Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

где $M$ – масса стержня. Сохранение момента импульса:

$$L_1 = L_2,$$

определяет угловую скорость вращения системы после удара:

$$w = \frac{lm\text{v}}{2I}.$$

Линейная скорость прилипшего шарика $u$ связана с угловой скоростью $\omega$ соотношением (1.1.18):

$$u = w\frac{l}{2} = \frac{m}{m + M/3}\text{v} » 1{,}67 \text{ м/с}.$$

**Задача 3.**

С наклонной плоскости скатываются два цилиндра: 1) сплошной деревянный и 2) полый металлический. Внешние размеры и массы их одинаковы. Какой цилиндр скатывается быстрее?

*Решение:*

Согласно закону сохранения механической энергии потенциальная энергия цилиндра переходит в кинетическую, которая равна сумме энергий поступательного и вращательного движений (2.3.5):

$$mgh = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где $h$ – высота наклонной плоскости, $m$ – масса цилиндра, v – скорость его оси, $I$ – момент инерции цилиндра. Скорость v оси цилиндра равна по величине скорости движения поверхности цилиндра относительно его оси, которая, в свою очередь, равна $\omega R$ (1.1.18):

$$\omega = \mathrm{v}/R,$$

$R$ – радиус цилиндра. Подставляя это в закон сохранения энергии, получаем:

$$mgh = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right),$$

то есть,

$$\mathrm{v}^2 = 2gh\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)^{-1}.$$

Два цилиндра в условии задачи имеют разные моменты инерции: сплошного цилиндра (2.1.6):

$$I_1 = \frac{mR^2}{2},$$

полого цилиндра, трубы (2.1.4): $I_2 = mR^2 = 2I_1 > I_1$ (массы и радиусы у них одинаковы по условию задачи).

Поэтому конечная скорость сплошного деревянного цилиндра больше конечной скорости полого металлического:

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{4}{3}gh} > \mathrm{v}_2 = \sqrt{gh},$$

а так как они проходят одинаковые пути, то средняя скорость $\langle v_1 \rangle > \langle v_2 \rangle$, а время скатывания меньше, $t_1 < t_2$.

Деревянный цилиндр скатывается быстрее.

**<u>Задачи</u>**

2.3.01. Платформа в виде диска радиусом $R = 1\ м$ вращается по инерции с частотой $n_1 = 6\ мин^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса которого $m = 80\ кг$. С какой частотой $n$ будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы $J = 120\ кг{\cdot}м^2$. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

2.3.02. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $R = 2\ м$, стоит человек массой $m_1 = 80\ кг$. Масса платформы $m_2 = 240\ кг$. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью $\omega$ будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2\ м/с$ относительно платформы.

2.3.03. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой $m_1 = 60\ кг$. На какой угол $\varphi$ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы $m_2 = 240\ кг$. Момент инерции $J$ человека рассчитывать как для материальной точки.

2.3.04. Тонкий прямой стержень длиной $L = 1\ м$ прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол $\varphi = 60\ °$ от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость $v$ нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

2.3.05. Обруч катится по горизонтальной дороге со скоростью $v = 2\ км/ч$. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку? Уклон горки равен $H = 10\ м$ на каждые $S = 100\ м$ пути.

2.3.06. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия шара $T = 14$ *Дж*. Определить кинетическую энергию $T_1$ поступательного и $T_2$ вращательного движения шара.

2.3.07. Пуля массой $m = 10$ *г* летит со скоростью v = *800 м/с*, вращаясь около продольной оси с частотой $n = 3000$ $с^{-1}$. Принимая пулю за цилиндр диаметром $d = 8$ *мм*, определить полную кинетическую энергию $T$ пули.

2.3.08. Сплошной цилиндр массой $m = 4$ *кг* катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость оси цилиндра v = *1 м/с*. Определить полную кинетическую энергию $E$ цилиндра.

2.3.09. Шар и цилиндр, двигаясь с одинаковой скоростью, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Найти отношение высот подъема шара и цилиндра.

2.3.10. Однородный цилиндрический маховик массой $M = 20$ *кг* и радиусом $R = 0{,}50$ *м* вращается по закону $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2$, где $\varphi$ – угол поворота маховика, $A = 1$ *рад*, $B = 16$ *рад/с*, $C = -2$ $рад/с^2$. Найти мощность, развиваемую при вращении, на момент времени $t = 3$ *с*.

## 2.4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### Теоретический минимум

Закон движения гармонических колебаний:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (2.4.1)$$

где $x$ – смещение колеблющейся точки от положения равновесия; $t$ – время; $A$, $\omega$, $\varphi_0$ – соответственно амплитуда, циклическая (круговая) частота, начальная фаза колебаний; $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент $t$.

Циклическая (круговая) частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu, \text{ или } \omega = 2\pi / T, \qquad (2.4.2)$$

где $\nu$ и $T$ – частота и период колебаний.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$V(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Ускорение при гармоническом колебании:

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитуда $A$ результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, определяется по формуле:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (2.4.3)$$

где $A_1$ и $A_2$ – амплитуды составляющих колебаний; $\varphi_1$ и $\varphi_2$ – их начальные фазы.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки:

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (2.4.4)$$

где $m$ – масса точки; $k$ – коэффициент квазиупругой силы ($\omega^2 = k / m$).

Материальная точка массы $m$, подвешенная на нерастяжимой нити длиной $l$, совершает колебания в вертикальной плоскости (математический маятник) (см. Рис. 2.4.1).

Здесь удобнее всего использовать уравнение движения (1.2.1) в проекции на ось $x$, направление которой совпадает с положительным направлением дуговой координаты $s$ (величина алгебраическая, на Рис. 2.4.1 изображен момент, когда $s > 0$). Начало отсчета $s$ возьмем в положении равновесия – в точке $O$.

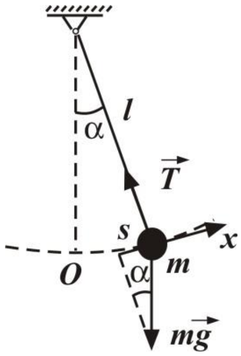


Рис. 2.4.1.

Имея в виду, что $s = l\cdot\alpha,\ \ddot{s} = l\ddot{\alpha}$ и что проекция силы натяжения на ось x $T_x = 0$, запишем:

$(x)\ m\ddot{s} = ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha$ , или

$$\ddot{\alpha} + (g/l)\sin\alpha = 0 . \qquad (2.4.5)$$

Из сопоставления с (2.4.4.) видим, что (2.4.5), вообще говоря, не является уравнением гармонических колебаний, поскольку в нем вместо $\alpha$ стоит $\sin\alpha$. Однако, при малых колебаниях, когда $\sin\alpha \approx \alpha$, уравнение совпадает с (2.4.4):

$$\ddot{\alpha} + (g/l)\alpha = 0 , \qquad (2.4.6)$$

откуда следует, что $\omega$ и период $T$ математического маятника, совершающего малые колебания равны:

$$\omega = \sqrt{g / l} , \qquad (2.4.7)$$

$$T = 2\pi\sqrt{l / g} , \qquad (2.4.8)$$

где $l$ – длина маятника; $g$ – ускорение свободного падения.

Период колебаний тела, подвешенного на пружине (пружинный маятник):

$$T = 2\pi\sqrt{m / k} , \qquad (2.4.9)$$

где $m$ – масса тела; $k$ – жесткость пружины. Формула справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука (при малой массе пружины в сравнении с массой тела).

Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{J / mga}\,, \qquad (2.4.10)$$

где $J$ – момент инерции колеблющегося тела (физического маятника) относительно оси колебаний; $a$ – расстояние от центра масс физического маятника до оси колебаний.

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$E={}^{1}\!/_{2}\, mA^2\omega^2. \qquad (2.4.11)$$

## Примеры решения задач

**Задача 1.**

Материальная точка массой $m = 10$ *г* совершает гармоническое колебание с периодом $T = 1$ *с*. Определить амплитуду колебаний $A$, максимальную скорость $V_{max}$ и максимальное ускорение $a_{max}$ колеблющейся точки, если полная энергия точки равна $E = 0{,}02$ *Дж*.

*Решение:*

Запишем закон движения гармонических колебаний (2.4.1):

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Скорость колеблющейся точки $V(t)$ определяется как первая производная от смещения $x(t)$ по времени: $V(t)=\dot{x}(t)=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)$.

Максимальное значение скорости: $V_{max}=\omega A$.

Ускорение точки определяется как производная от скорости по времени: $a(t)=\ddot{x}(t)=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$.

Максимальное значение ускорения: $a_{max} = \omega^2 A$.

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной энергии и равна максимальной потенциальной или максимальной кинетической энергии (2.4.11): $E={}^{1}\!/_{2}\, mA^2\omega^2$.

Круговая (циклическая) частота связана с периодом: $\omega = 2\pi / T$. Тогда: $E=4\pi^2 mA^2/2T^2$.

Из этого выражения найдем амплитуду:

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Проверим размерность:

$$[A] = c\sqrt{\frac{H \cdot м}{кг}} = c\sqrt{\frac{кг \cdot м \cdot м}{c^2 \cdot кг}} = \frac{c \cdot м}{c} = м.$$

Произведем вычисления:

$$A = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}02}{0{,}01}} = 0{,}32\ м.$$

$\omega = 2\pi / T = 2 \cdot 3{,}14 / 1 = 6{,}28\ c^{-1}$.

$V_{max} = 6{,}28\ c^{-1} \cdot 0{,}32\ м = 2\ м/с$.

$a_{max} = (6{,}28\ c^{-1})^2 \cdot 0{,}32\ м = 12{,}6\ м/с^2$.

Ответ: $A = 0{,}32\ м$; $V_{max} = 2\ м/с$; $a_{max} = 12{,}6\ м/с^2$.

**Задачи**

2.4.01. Физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $L = 120\ см$ колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на некоторое расстояние $a$ от центра масс стержня. При каком значении $a$ период $T$ колебаний имеет наименьшее значение?

2.4.02. Математический маятник длиной $L_1 = 40\ см$ и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $L_2 = 60\ см$ синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние $a$ до центра масс стержня от оси колебаний.

2.4.03. Диск радиусом $R = 24\ см$ колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Определить период $T$ колебаний такого маятника.

2.4.04. В открытую с обоих концов U-образную трубку с площадью поперечного сечения $S = 0{,}4\ см^2$ быстро вливают ртуть массой $m = 200\ г$. Определить период $T$ колебаний ртути в трубке.

2.4.05. Однородный диск радиусом $R=30\ см$ колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период $T$ его колебаний?

2.4.06. Математический маятник длиной $L = 1\ м$ установлен в лифте. Лифт поднимается с ускорением $a = 2{,}5\ м/с^2$. Определить период $T$ колебаний маятника.

2.4.07. На концах тонкого стержня длиной $L = 30\ см$ укреплены одинаковые грузики по одному на каждом конце. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через точку, удаленную на $d = 10\ см$ от одного из концов стержня. Определить период $T$ колебаний такого физического маятника. Массой стержня пренебречь.

2.4.08. Цилиндрический поплавок массой $m = 10\ г$ и сечением $S = 1\ см^2$ вертикально погружен в воду. Чему равна частота $\omega$ его колебаний, возникающих при малом смещении поплавка от положения равновесия? Сопротивлением воды пренебречь. Плотность воды $\rho_0 = 1000\ кг/м^3$.

2.4.09. Материальная точка совершает гармонические колебания. Начальная фаза колебаний равна $\varphi_0 = 0^o$, период колебаний $T = 6\ с$, смещение точки в начальный момент времени максимально. Определить ближайший момент времени, когда скорость материальной точки равна половине максимального ее значения.

2.4.10. Материальная точка совершает гармонические колебания. Начальная фаза колебаний равна $\varphi_0 = 0^o$, период колебаний $T = 24\ с$, смещение точки в начальный момент времени максимально. Определить ближайший момент времени, когда ускорение точки равно половине максимального значения.

## 2.5. ВОЛНЫ В МЕХАНИКЕ

**Теоретический минимум**

Уравнение плоской монохроматической волны:

$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - x/V)$, или $\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$, (2.5.1)

где $\xi(x, t)$ – смещение точек среды с координатой $x$ в момент времени $t$; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая (круговая) частота; $V$ – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость); $\nu$ – частота; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $\lambda$ – длина волны.

Длина волны связана с периодом колебаний $T$ и частотой $\nu$ соотношениями $\lambda = VT$ и $\lambda = V/\nu$. (2.5.2)

Разность фаз колебаний двух точек среды $\Delta\varphi$, расстояние между которыми (разность хода) равно $\Delta x$:

$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\Delta x$, (2.5.3)

где $\lambda$ – длина волны.

Уравнение стоячей волны:

$\xi(x, t) = A\cos kx\cos\omega t$. (2.5.4)

В точках, где $|\cos kx| = 1$, находятся максимумы – *пучности*, а в точках, где $\cos kx = 0$, находятся минимумы – *узлы*. Интервалы между соседними пучностями или узлами равны половине длины волны $\Delta x = \pi/k = \lambda/2$ (см. Рис. 2.5.1.)

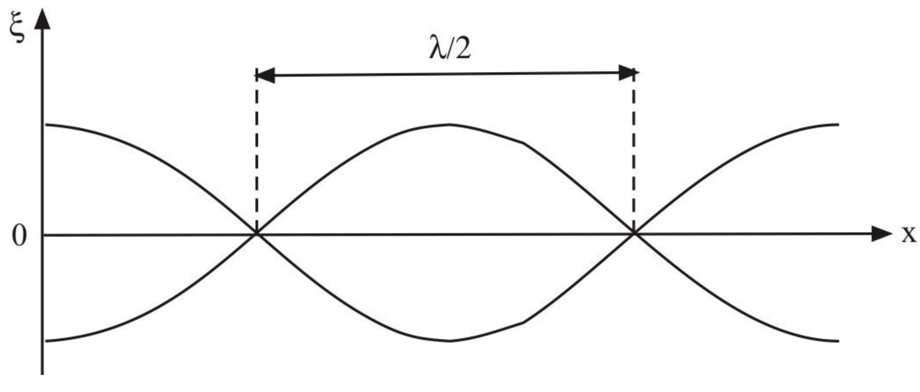


Рис. 2.5.1.

## Примеры решения задач

**Задача 1.**

Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500\ Гц$ и амплитуду $A = 0,25\ мм$ распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70\ см$. Найти: 1) скорость распространения колебаний $V$; 2) максимальную скорость частиц $V_{max}$.

*Решение:*

1) Скорость распространения колебаний или фазовая скорость равна (см. 2.5.2):

$V = \lambda / T = \lambda\, \nu = 0,7 \cdot 500 = 350\ м/с,$

где $T = 1/\nu$ – период колебаний.

2) Запишем уравнение волны, распространяющейся вдоль оси X:

$\xi(x, t) = A \sin(2\pi\nu\, t - 2\pi\, x/\lambda),$

где $\xi(x, t)$ – величина отклонения частиц от положения равновесия. Скорость колебаний частиц равна:

$$V(t) = \frac{d\xi(x,t)}{dt} = 2\pi\nu A \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Амплитуда этого колебания и есть максимальная скорость частиц воздуха:

$V_{max} = 2\pi\nu A = 6,28 \cdot 500 \cdot 25 \cdot 10^{-5} = 0,785\ м/с.$

Ответ: 1) $V = 350\ м/с$; 2) $V_{max} = 0,785\ м/с$.

## Задачи

2.5.01. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $V = 100\ м/с$. Наименьшее расстояние $\Delta x$ между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно $1\ м$. Определить частоту $\nu$ колебаний.

2.5.02. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний источника волн, находящегося в упругой среде, и точки этой среды, отстоящей на $x = 2\ м$ от источника. Частота колебаний $\nu = 5$ *Гц*; волны распространяются со скоростью $V = 40$ *м/с*.

2.5.03. Две точки находятся на расстоянии $\Delta x = 50$ *см* друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью $V = 50$ *м/с*. Период колебаний $T = 0{,}05$ *с*. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в этих точках.

2.5.04. Определить скорость $V$ распространения волны в упругой среде, если разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 10$ *см*, равна $\pi/3$. Частота колебаний $\nu = 25$ *Гц*.

2.5.05. Волна с периодом $T = 1{,}2$ *с* и амплитудой колебаний $A = 2$ *см* распространяется со скоростью $V = 15$ *м/с*. Чему равно смещение $\xi(x,t)$ точки, находящейся на расстоянии $x = 45$ *м* от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время $t = 4$ *с* ?

2.5.06. От источника колебаний распространяется волна вдоль прямой линии. Амплитуда колебаний $A = 10$ *см*. Как велико смещение $\xi(x,t)$ точки, удаленной от источника на $x = 3/4\,\lambda$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0{,}9\,T$ ?

2.5.07. Определить длину $\lambda$ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние $L$ между первой и седьмой пучностями равно *15 см*.

2.5.08. Определить длину $\lambda$ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние $L$ между первым и четвертым узлом равно *15 см*.

2.5.09. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 0{,}5$ *кГц* и амплитуду $A = 0{,}25$ *мм*, распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 70$ *см*. Найти максимальную скорость $V_{max}$ частиц среды.

2.5.10. Задано уравнение плоской волны $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$, где $A = 0{,}5$ *см*, $\omega = 628\ с^{-1}$, $k = 2\ м^{-1}$. Определить максимальные значения скорости $V_{max}$ и ускорения $a_{max}$ колебаний частиц среды.

# КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

**Студент должен решить 10 задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.**

| Вариант | Номер задачи | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.1.01 | 1.2.01 | 1.3.01 | 1.4.01 | 1.5.01 | 2.1.01 | 2.2.01 | 2.3.01 | 2.4.01 | 2.5.01 |
| 2 | 1.1.02 | 1.2.02 | 1.3.02 | 1.4.02 | 1.5.02 | 2.1.02 | 2.2.02 | 2.3.02 | 2.4.02 | 2.5.02 |
| 3 | 1.1.03 | 1.2.03 | 1.3.03 | 1.4.03 | 1.5.03 | 2.1.03 | 2.2.03 | 2.3.03 | 2.4.03 | 2.5.03 |
| 4 | 1.1.04 | 1.2.04 | 1.3.04 | 1.4.04 | 1.5.04 | 2.1.04 | 2.2.04 | 2.3.04 | 2.4.04 | 2.5.04 |
| 5 | 1.1.05 | 1.2.05 | 1.3.05 | 1.4.05 | 1.5.05 | 2.1.05 | 2.2.05 | 2.3.05 | 2.4.05 | 2.5.05 |
| 6 | 1.1.06 | 1.2.06 | 1.3.06 | 1.4.06 | 1.5.06 | 2.1.06 | 2.2.06 | 2.3.06 | 2.4.06 | 2.5.06 |
| 7 | 1.1.07 | 1.2.07 | 1.3.07 | 1.4.07 | 1.5.07 | 2.1.07 | 2.2.07 | 2.3.07 | 2.4.07 | 2.5.07 |
| 8 | 1.1.08 | 1.2.08 | 1.3.08 | 1.4.08 | 1.5.08 | 2.1.08 | 2.2.08 | 2.3.08 | 2.4.08 | 2.5.08 |
| 9 | 1.1.09 | 1.2.09 | 1.3.09 | 1.4.09 | 1.5.09 | 2.1.09 | 2.2.09 | 2.3.09 | 2.4.09 | 2.5.09 |
| 10 | 1.1.10 | 1.2.10 | 1.3.10 | 1.4.10 | 1.5.10 | 2.1.10 | 2.2.10 | 2.3.10 | 2.4.10 | 2.5.10 |

## ТЕМЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ (РЕФЕРАТОВ)

**Студент должен представить письменную работу (реферат) по теме, номер которой совпадает с последней цифрой шифра зачетной книжки студента.**

1) Основные кинематические характеристики движения частиц.

2) Инерциальные системы. Законы Ньютона.

3) Законы сохранения в механике.

4) Уравнения движения и равновесия твердого тела.

5) Принцип относительности в механике.

6) Модель гармонического осциллятора. Примеры гармонических осцилляторов: маятник, груз на пружине, колебательный контур.

7) Вынужденные колебания. Резонанс. Использование явления резонанса в науке и технике.

8) Физический смысл спектрального разложения. Использование методов спектрального оценивания в науке и технике.

9) Волновые процессы и методы их исследования.

10) Нелинейные волновые процессы.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:**

1. Савельев И. В. Курс общей физики. В 5 книгах. Книга 1. Механика.–2003 г.
2. Иродов И. Е. Механика. Основные законы. – 2006 г.
3. Иродов И. Е. Волновые процессы. Основные законы. – 2006 г.
4. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. – 2001 г.
5. Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. – 1988 г.

## СОДЕРЖАНИЕ